Licence de Mathématiques

Université d'Artois

Exercices de Topologie

P. Lefèvre

1 Révisions : Théorie des ensembles et Topologie de $\mathbb{R}$

Exercice 1.1 Soient E et F des ensembles, f une application de E dans F.
a) Soit $(A_i)_{i\in I}$ une famille d'ensembles de E. Montrer que $f(\cap_{i\in I} A_i) \subset \bigcap_{i\in I} f(A_i)$ et que si f est injective alors on a égalité. Réciproquement, montrer que si on a toujours égalité, alors f est injective.
b) Montrer que f est injective si et seulement si pour toute partie A de E, $f^{-1}(f(A)) = A$.
c) Montrer que f est surjective si et seulement si pour toute partie B de F, $f(f^{-1}(B)) = B$.

Exercice 1.2 Soit X un ensemble, montrer que l'inclusion dans $\mathcal{P}(X)$ est une relation d'ordre. Est-il total ? Montrer que toute partie de $\mathcal{P}(X)$ admet une borne supérieure et une borne inférieure.

Exercice 1.3 Soient E un ensemble et $A, B \subset E$. On considère l'application f de $\mathcal{P}(E)$ dans $\mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B)$ définie par $f(X) = (X \cap A, X \cap B)$. Montrer que f est injective si et seulement si $E = A \cup B$.

Exercice 1.4 Montrer que $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ sont denses dans $\mathbb{R}$.

Exercice 1.5 Théorème de Césaro.
1) Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de complexes convergente vers a. On définit pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$v_n = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} a_k.$$

Montrer que cette suite converge aussi vers a.
2) Soit $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels strictement positifs. A toute suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de complexes, on associe

$$\tilde{a}_n = \frac{\sum_{k=0}^{n} \alpha_k a_k}{\sum_{k=0}^{n} \alpha_k}.$$

Montrer l'équivalence entre les deux assertions suivantes :
i) La série $\sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k$ diverge.
ii) Pour toute $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergente vers a, la suite $(\tilde{a}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ associée converge aussi vers a.

Exercice 1.6 Sous-groupes additifs de $\mathbb{R}$. On étudie les sous-groupes de $(\mathbb{R}, +)$. Soit H un sous-groupe non réduit à 0. On pose $a = \inf\{x \in H |\ x > 0\}$. Justifier l'existence de a.
1) On veut montrer que si $a > 0$, $H = a\mathbb{Z}$.
i) En utilisant la caractérisation de la borne inférieure, montrer que $a \in H$. En déduire $a\mathbb{Z} \subset H$.
ii) Soit $h \in H \cap \mathbb{R}^{+*}$. Considérer $k = \max\{n \in \mathbb{N} |\ na \leq h\}$ et montrer que $h = ak$. Conclure.
2) Montrer que si $a = 0$, H est dense dans $\mathbb{R}$.
3) Soient $a, b \in \mathbb{R}^{*+}$, montrer que $a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z}$ est dense dans $\mathbb{R}$ ssi $\dfrac{a}{b} \notin \mathbb{Q}$.
4) Montrer que $\cos(\mathbb{Z})$ est dense dans $[-1, 1]$.
5) Soient $a, b \in \mathbb{R}^{*+}$, montrer que $a\mathbb{N} + b\mathbb{Z}$ est dense dans $\mathbb{R}$ si $\dfrac{a}{b} \notin \mathbb{Q}$ et que $\sin(\mathbb{N})$ est dense dans $[-1, 1]$.

Exercice 1.7 Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite bornée de réels.

a) Montrer que les suites $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(i_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suivantes sont bien définies :

$$s_n = \sup_{k\geq n} x_k \qquad\qquad i_n = \inf_{k\geq n} x_k.$$

b) Montrer que ces deux suites sont convergentes. On note $\overline{\lim}\, x_n$ la limite de $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $\underline{\lim}\, x_n$ la limite de $(i_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

c) Montrer que $\overline{\lim}\, x_n$ est la plus grande valeur d'adhérence de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et que $\underline{\lim}\, x_n$ est la plus petite valeur d'adhérence de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

d) Etablir le théorème de Bolzano-Weierstrass pour les suites réelles.

e) Montrer que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge si et seulement si $\underline{\lim}\, x_n = \overline{\lim}\, x_n$.

Exercice 1.8 *Examen Septembre 2003*

1) Soient $a < b$ deux réels. Soit n_o un entier supérieur à $\dfrac{1}{b-a}$. Montrer qu'il existe $k \in \mathbb{Z}$ et un entier $n \geq n_0$ tels que $\ln(n) + 2k\pi \in [a, b]$.

Pour $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$, on pose : $u_n = \sin(\ln(n))$.

2) Montrer que cette suite est dense dans $[-1, 1]$.

3) Est-ce que cette suite converge ?

Exercice 1.9 Soient deux suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $[0, 1]$ telles que le produit $a_n b_n$ converge vers 1. Montrer que chacune des suites converge vers 1.

Indication : on pourra raisonner en termes de sous-suites ou trouver un argument très élémentaire (niveau première)

Exercice 1.10 On pose $\tilde{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ et on met sur $\tilde{\mathbb{R}}$ l'ordre suivant : pour tout $x \in \mathbb{R}$, $-\infty < x < +\infty$; et sur $\mathbb{R}$, l'ordre usuel. Montrer que tout partie de $\tilde{\mathbb{R}}$ admet un majorant et un minorant; une borne supérieure et une borne inférieure.

2 Espaces métriques.

Exercice 2.1 Vérifier que, sur $\mathbb{R}$, $d(x,y) = |\arctan(x) - \arctan(y)|$ est une distance.

Exercice 2.2 Montrer que d_2, d_1 et d_∞ (cf cours) sont bien des distances.

Exercice 2.3 Soit E un ensemble. Soit d définie par $d(x,y) = 1$ si $x = y$ et $d(x,y) = 0$ sinon (où $x, y \in E$). Montrer que d est une distance sur E.

Exercice 2.4 Pour A et B des parties de $\mathbb{N}^*$, on définit : $d(A,B) = \Big(\min(A\Delta B)\Big)^{-1}$ si $A \neq B$ et $d(A,B) = 0$ si $A = B$. On rappelle que $A\Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$.

a) Montrer que, pour tout $m \in \mathbb{N}^*$ et tous $A, B \subset \mathbb{N}^*$, $d(A,B) < \dfrac{1}{m} \iff A \cap [1,m] = B \cap [1,m]$.
b) Montrer que d est une distance sur l'ensemble des parties de $\mathbb{N}^*$.
c) Montrer que la suite $X_n = \{1, 2^n, 3^n, 4^n, \ldots\}$ converge.

Exercice 2.5 Pour $x, y \in \mathbb{Z}$, on pose $d(x,y) = 0$ si $x = y$ et $d(x,y) = \frac{1}{m}$ sinon, où $m \geq 1$ vérifie : $x - y$ est divisible par 10^{m-1} mais pas par 10^m.
a) Montrer que, pour tout $p \in \mathbb{N}$ et tous $x, y \in \mathbb{Z}$, $d(x,y) < \dfrac{1}{p} \iff x - y$ est divisible par 10^p.
b) Montrer que d est une distance sur $\mathbb{Z}$.
c) On pose $x_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k.k!$ pour tout entier n. Montrer que cette suite converge vers -1 dans $(\mathbb{Z}, d)$. Indication : $x_n + 1 = (n+1)!$.
d) Montrer que la suite $(10^n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0 et que la suite $(2^n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge dans $(\mathbb{Z}, d)$.

Exercice 2.6 Soit (E,d) un espace métrique. Montrer que l'application δ définie sur $E \times E$ par $\delta(x,y) = \dfrac{d(x,y)}{1 + d(x,y)}$, pour $x, y \in E$, est une distance.

Exercice 2.7 Montrer que l'adhérence d'une partie bornée est bornée.

Exercice 2.8 Donner un exemple d'espace métrique où l'adhérence d'une boule ouverte n'est pas la boule fermée correspondante et l'intérieur d'une boule fermée n'est pas la boule ouverte correspondante.

Exercice 2.9 Soient (E,d) un espace métrique et $A \subset E$, non vide, distinct de E.
Montrer que (pour $x \in E$) $x \in \overset{\circ}{A} \Leftrightarrow d(x, A^c) > 0$.
A-t-on toujours $d(x,A) = d(x, \overset{\circ}{A})$?

Exercice 2.10 Soit f une fonction strictement croissante continue et bornée de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On pose $\tilde{f} = f$ sur $\mathbb{R}$ et $\tilde{f}(+\infty) = \lim\limits_{+\infty} f$ et $\tilde{f}(-\infty) = \lim\limits_{-\infty} f$ (justifier l'existence de ces limites). On définit alors, sur $\tilde{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$, $d(x,y) = |\tilde{f}(x) - \tilde{f}(y)|$, où $x, y \in \tilde{\mathbb{R}}$. Montrer que d est une distance sur $\tilde{\mathbb{R}}$.

Exercice 2.11 Soient $(E, \|.\|)$ un espace vectoriel normé et K une partie convexe non vide de E. Montrer que $\bar{K}$ et $\overset{\circ}{K}$ sont convexes.

Exercice 2.12 Soient $\|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)|dt$ et $\|f\|_\infty = \sup_{t\in[0,1]} |f(t)|$. Montrer que ces normes ne sont pas équivalentes sur $C([0,1])$.

Exercice 2.13 On considère $C_c(\mathbb{R})$ l'espace des fonctions continues sur $\mathbb{R}$ à support compact. Montrer que les normes $\|.\|_1$, $\|.\|_2$ et $\|.\|_\infty$ ne sont pas comparables sur cet espace.

Exercice 2.14 Déterminer les adhérences et les intérieurs des parties A suivantes de $\mathbb{R}^n$ (muni de la distance euclidienne).

a) $(n=1)$ $A = [a,b]$.
b) $(n=1)$ $A = [a,+\infty[$.
c) $(n=2)$ $A = [a,b]\times\{0\}$
d) $(n=2)$ $A = \{(x,y)|\, x^2+y^2=1\}$
e) $(n=1)$ $A = \mathbb{Q}\cap]0,1[$.
f) $(n=2)$ $A = \mathbb{Q}\times\mathbb{Q}$
g) $(n=2)$ $A = \mathbb{Q}\times\mathbb{Q}^c$
h) $(n=1)$ $A = \{1/n|\, n\in\mathbb{N}^*\}$.
i) $(n=1)$ $A = \{\sin(1/n)|\, n\in\mathbb{N}^*\}$.
j) $(n=1)$ $A = \{\sin(n)|\, n\in\mathbb{N}^*\}$.
k) $(n=4)$ $A = \{(a,b,c,d)|\, ad-bc\neq 0\}$.
l) l'ensemble des matrices orthogonales d'ordre 2.
m) l'ensemble des matrices inversibles

Exercice 2.15 Soit $p>0$. On rappelle que $\ell^p = \{(a_n)\in\mathbb{C}^{\mathbb{N}};\ \sum |a_n|^p < +\infty\}$ et $\|(a_n)\|_p = (\sum |a_n|^p)^{\frac{1}{p}}$ est alors défini sur ℓ^p.

Pour $p=+\infty$: $\ell^\infty = \{(a_n)\in\mathbb{C}^{\mathbb{N}};\ \sup_n |a_n| < +\infty\}$ et $\|(a_n)\|_\infty = \sup_n |a_n|$ est alors défini sur ℓ^∞. Enfin, $c_0 = \{(a_n)\in\mathbb{C}^{\mathbb{N}};\ \lim_n a_n = 0\}$.

Soient $p,q\geq 1$ tels que $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$.

a)i) Montrer l'inégalité de Young : pour tous $x,y\in\mathbb{R}^+$, $xy\leq \frac{1}{p}x^p+\frac{1}{q}y^q$.

ii) En déduire l'inégalité de Hölder : pour tout $a\in\ell^p$ et tout $b\in\ell^q$, montrer que $ab\in\ell^1$ avec

$$\|(a_n.b_n)\|_1 \leq \|(a_n)\|_p.\|(b_n)\|_q.$$

b) En déduire l'inégalité de Minskowski, c'est à dire l'inégalité triangulaire pour la norme $\|.\|_p$ et montrer que $\|.\|_p$ est effectivement une norme.

Exercice 2.16 Montrer que c_0 est séparable mais que ℓ^∞ est non séparable. Pour ce deuxième point, on suppose qu'il existe une partie dénombrable dense $(v_n)_{n\geq1}$. Soit x une suite à valeurs 0 ou 1. On note $\omega_x = \overset{\circ}{B}(x,\frac{1}{2})$.

1) Montrer que $x\neq x' \Rightarrow \omega_x\cap\omega_{x'}=\emptyset$.

2) Montrer que pour tout $x\in\{0,1\}^{\mathbb{N}}$, il existe un entier $n(x)$ tel que $v_{n(x)}\in\omega_x$. Justifier que pour $x\neq x'$, on a $n(x)\neq n(x')$.

3) En déduire que $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ devrait alors être dénombrable et conclure (on pourra faire un raisonnement via la diagonale de Cantor).

Exercice 2.17 Soient $(E,\|.\|)$ un espace vectoriel normé et F un sous-espace vectoriel, distinct de E. Montrer que F est d'intérieur vide.

Exercice 2.18 Soient E l'espace des fonctions sur $[a,b]$ à valeurs réelles, qui sont bornées et $A\subset[a,b]$, non vide. On considère X le sous-ensemble de E des fonctions nulles sur A. Montrer que $X = FrX$.

3 Espaces topologiques.

Exercice 3.1 Lesquelles des familles suivantes de parties de $[0,1]$ forment une topologie sur $[0,1]$?

$\tau_1 = \{A \subset [0,1] |\, A \subset]0,1[\text{ ou } A = [0,1]\}$.
$\tau_2 = \{A \subset [0,1] |\, A \subset \mathbb{Q} \cap [0,1] \text{ ou } \mathbb{Q} \cap [0,1] \subset A\}$.
$\tau_3 = \{A \subset [0,1] |\, A.A \subset A\}$.
$\tau_4 = \{A \subset [0,1] |\, A + A \cap [0,1] \subset A \text{ ou } \mathbb{Q} \cap [0,1] \subset A\}$.
$\tau_5 = \{A \subset [0,1] |\, 0 \notin A \text{ ou } A = [0,1]\}$.
$\tau_6 = \{A \subset [0,1] |\, 0 \in A \text{ ou } A = \emptyset\}$.

Exercice 3.2 Montrer que toute intersection de topologies est une topologie.

Exercice 3.3 Soit Σ une famille de parties sur un ensemble X. On suppose que cette famille est presque stable par intersection : $\forall A, B \in \Sigma$, $\forall x \in A \cap B$, $\exists C \in \Sigma$, $x \in C \subset A \cap B$. Montrer que la topologie engendrée par Σ est l'ensemble des réunions d'éléments de Σ, auquel on ajoute $\{X\}$.

Exercice 3.4 Soit (X, τ) un espace topologique, que l'on suppose séparé. On dit qu'il est régulier si pour tout $x \in X$ et tout fermé F ne contenant pas x, il existe deux ouverts disjoints, l'un contenant x et l'autre contenant F.

1) Montrer que (X, τ) est régulier si et seulement si tout élément de X a une base de voisinages fermés.

2) Montrer (X, τ) est normal si et seulement si tout fermé de X a une base de voisinages fermés.

Exercice 3.5 Soit (X, τ) un espace topologique.

1) Soit Y une partie de X. Montrer que l'intérieur de $Fr(Fr(Y))$ est vide.

2) Donner un exemple de partie Y de $\mathbb{R}$ telle que $Fr(Fr(Y)) \neq Fr(Y)$.

Exercice 3.6 Soient (X, τ) un espace topologique et $A, B \subset X$. On suppose que A est ouvert.

a) Montrer que $A \cap \bar{B} \subset \overline{A \cap B}$.

b) Donner un contre-exemple dans $\mathbb{R}$ si on ne suppose pas A ouvert.

Exercice 3.7 Soit (X, τ) un espace topologique. Pour $A \subset X$, on note A' l'ensemble des points d'accumulation de A. Soient $A, B \subset X$.

i) Montrer que $(A \cup B)' = A' \cup B'$ et que $(A \cap B)' \subset A' \cap B'$. A-t-on égalité en général ? (Indication : construire un contre-exemple dans $\mathbb{R}$ où le seul point d'accumulation de A et de B est 0 et où 0 est leur seul point commun)

ii) On suppose que (X, τ) est un espace séparé. Montrer que A' est fermé.

4 Continuité et Convergence.

Exercice 4.1 Montrer que l'application suivante est continue (on calculera la norme; montrer qu'elle n'est pas atteinte sur la boule unité)

$$\begin{array}{rcl} \varphi \;:\; c_0 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ u & \longmapsto & \displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{u_n}{2^{n+1}} \end{array}$$

Exercice 4.2 Soit (E,d) un espace métrique. Montrer que l'application δ définie sur $E\times E$ par $\delta(x,y)=\dfrac{d(x,y)}{1+d(x,y)}$, pour $x,y\in E$, est une distance.

Montrer que δ est topologiquement équivalente à d.

Même questions avec $\delta_a(x,y)=\min(a,d(x,y))$, où $a>0$.

Exercice 4.3 Soit $(E,\|.\|)$ un espace vectoriel normé réel. On considère V un sous-espace fermé et F de dimension finie en somme directe avec V. Montrer par récurrence sur la dimension de F que $V\oplus F$ est fermé. Indication, il suffit de le faire pour $\dim F=1$ et on uilisera la caractérisation de la continuité des formes linéaires.

Exercice 4.4 Soient $(E,\|.\|)$ un espace vectoriel normé réel et ψ dans le dual algébrique. On suppose que l'image par ψ de toute suite convergente vers 0 est bornée. Montrer que ψ est continue.

Exercice 4.5 Soient (X,d) et (Y,δ) deux espaces métriques. Soient f et g continues de X dans Y.

i) Montrer que $\{x\in X|\, f(x)=g(x)\}$ est fermé dans X.

ii) Soit A une partie dense de X. Montrer que si f et g coïncident sur A alors $f=g$.

Exercice 4.6 Soit f l'application $[0,1[$ dans le cercle unité du plan complexe qui à $t\in[0,1[$ associe $e^{2i\pi t}$.

i) Montrer que f est une bijection continue.

ii) f est-il un homéomorphisme ?

Exercice 4.7 Soient $\mathbb{D}$ le disque unité fermé de $\mathbb{R}^2$ (i.e. la boule unité fermée pour la norme euclidienne) et K le carré unité fermé : $K=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2|\,\max(|x|,|y|)\le 1\}$. Ils sont munis de la topologie induite par la structure euclidienne de $\mathbb{R}^2$. Montrer que $\mathbb{D}$ et K sont homéomorphes.

Pour cela, on pourra considérer l'application de $\mathbb{D}$ dans K définie par

$$f(0)=0 \qquad \text{et} \qquad f(x,y)=\Big(\frac{x\sqrt{x^2+y^2}}{\max(|x|,|y|)},\frac{y\sqrt{x^2+y^2}}{\max(|x|,|y|)}\Big) \qquad \text{pour } (x,y)\in\mathbb{D}\setminus\{0\}.$$

Exercice 4.8 Soient (f_n) une suite d'applications uniformément continues de (X,d) dans (Y,δ) (deux espaces métriques), convergeant uniformément vers f sur X. Montrer que f est uniformément continue.

Exercice 4.9 Montrer que l'ensemble des endomorphismes cycliques est un ouvert (que le corps soit $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).

Exercice 4.10 Soit $f(x) = x\sin(\ln(x))$ pour $x > 0$ et $f(0) = 0$. Est-ce que f est uniformément continue sur $\mathbb{R}^+$?

Soit $g(x) = x\sin(x)$ pour $x \in \mathbb{R}$. Est-ce que g est uniformément continue sur $\mathbb{R}$?

Exercice 4.11 Pour $f \in C([0,1])$, on définit les normes $\|f\|_\infty = \sup\limits_{t\in[0,1]} |f(t)|$ et $\|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)|dt$. Les applications linéaires suivantes sont-elles continues ? On calculera éventuellement leur norme.

$$\begin{array}{rcl} \varphi \ : \ (C([0,1]), \|.\|_\infty) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ f & \longmapsto & f(0) \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} \varphi \ : \ (C([0,1]), \|.\|_1) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ f & \longmapsto & f(0) \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} \varphi \ : \ (C([0,1]), \|.\|_1) & \longrightarrow & (C([0,1]), \|.\|_\infty) \\ f & \longmapsto & f \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} \varphi \ : \ (C([0,1]), \|.\|_1) & \longrightarrow & (C([0,1]), \|.\|_\infty) \\ f & \longmapsto & \left(x \mapsto \int_0^x f(t)dt\right) \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} \varphi \ : \ (C([0,1]), \|.\|_1) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ f & \longmapsto & \int_0^{\frac{1}{2}} f(t)dt - \int_{\frac{1}{2}}^1 f(t)dt \end{array}$$

Exercice 4.12 Soit σ l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $\sigma(x) = 1$ si $x \geq 0$ et $\sigma(x) = -1$ sinon. Soit f l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = \sigma(x)\sqrt{|x|}$ pour tout réel x.

Montrer que f est un homéomorphisme vérifiant pour tous $x, y \in \mathbb{R}$, $|f(x) - f(y)| \leq 2\sqrt{|x-y|}$ et $|f^{-1}(x) - f^{-1}(y)| \leq |x-y|(|x| + |y|)$. Est-ce que f et f^{-1} sont uniformément continues ?

Exercice 4.13 Hahn-Banach fini-dimensionnel. Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension $n \geq 1$. Soient F un sous-espace de E et f une forme linéaire continue sur F. Montrer que f se prolonge en une forme linéaire $\tilde{f}$ sur E avec $\|\tilde{f}\| = \|f\|$.

Indication : on raisonnera par récurrence sur la dimension. On considère alors f une forme linéaire continue sur F, de dimension finie et $a \notin F$. On prouvera l'existence de $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que pour tous $x, y \in F$, on ait $f(x) - \|f\|.\|x - a\| \leq \alpha \leq \|f\|.\|y + a\| - f(y)$ pour conclure avec $E = F \oplus \mathbb{R}a$.

5 Topologie produit - Topologie quotient.

Exercice 5.1 Soit $(E_i)_{i\in I}$ une famille d'espaces topologiques. Leur produit est muni de la topologie produit. Montrer qu 'une suite $(u_n)_n$ est convergente vers $\ell = (\ell_i)_{i\in I}$ si et seulement si pour chaque $i \in I$, $(u_{n,i})_n$ converge vers ℓ_i.

Exercice 5.2 Soit f une application dérivable de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On définit l'application

$$\begin{array}{rcll} F \ : \ \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} & \\ (x,y) & \longmapsto & \dfrac{f(x)-f(y)}{x-y} & \text{si} \quad x \neq y \\ (x,y) & \longmapsto & f'(x) & \text{si} \quad x = y \end{array}$$

L'espace $\mathbb{R}^2$ est muni de la topologie produit ($\mathbb{R}$ est muni de sa topologie usuelle). Montrer que F est continue si et seulement si f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

Exercice 5.3 Sur l'espace $([0,1], |.|)$, on définit la relation d'équivalence : $x\mathcal{R}y$ si $x-y \in \mathbb{Z}$ (i.e. l'égalité modulo 1).

Montrer que l'espace quotient $[0,1]/\mathcal{R}$ (muni de la topologie quotient) est homéomorphe au cercle unité Γ du plan, via l'application g qui, à $\dot{t} \in [0,1]/\mathcal{R}$, associe $(\cos 2\pi t, \sin 2\pi t) \in \Gamma$. On pourra utiliser l'application $f = g \circ \sigma$, où σ est la surjection canonique de $[0,1]$ sur $[0,1]/\mathcal{R}$.

Exercice 5.4 Groupes topologiques. On appelle groupe topologique, un groupe $(G, .)$ muni d'une topologie telle que les applications suivantes soient continues ($G\times G$ est muni de la topologie produit)

$$\begin{array}{ccc} G\times G & \longrightarrow & G \\ (x,y) & \longmapsto & x.y \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} G & \longrightarrow & G \\ g & \longmapsto & g^{-1} \end{array}$$

a) Montrer que tout sous-groupe d'un groupe topologique G est un groupe topologique. De plus, montrer que si G est séparé, tout sous-groupe aussi.

b) Montrer qu'un groupe topologique est séparé si et seulement si $\{e\}$ est fermé.

c) Montrer que $GL_n(\mathbb{R})$ est un groupe topologique séparé (pour la topologie induite par la topologie d'espace vectoriel normé de $\mathcal{M}n(\mathbb{R})$).

d) En déduire que les sous-groupes suivants de $GL_n(\mathbb{R})$ sont des groupes topologiques séparés : $GL_n^+(\mathbb{R})$, $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{SO}_n(\mathbb{R})$.

6 Espaces compacts.

Exercice 6.1 Soient E et F des espaces topologiques séparés.

1) Soit $f|E \to F$ bijective et ouverte. Montrer que pour toute partie compacte B de F, $f^{-1}(B)$ est une partie compacte de E.

2) On suppose E compact. Soit A une partie fermée de $E \times F$. Montrer que la projection de A sur F est fermée. Donner un exemple où la projection de A sur E n'est pas fermée.

Exercice 6.2 Montrer qu'il n'existe pasde partition dénombrable de $[0,1]$ en fermés (non vides). Pour cela, on raisonnera par l'absurde en supposant que $[0,1] = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n$ où les F_n sont des fermés disjoints non vides. Considérer les extrémités (borne sup. et bornes inf.) de certains d'entre eux pour mettre en évidence une suite de segments emboîtés et aboutir à une contradiction.

Exercice 6.3 Soient (E,d) un espace métrique compact et $f : E \to E$ une isométrie. Montrer que f est bijective. Indication : considérer les images itérées d'un point.

Exercice 6.4 Soient (E,d) un espace métrique compact et $f : E \to E$ une application continue telle que pour tous $x, y \in E$, $d(f(x), f(y)) \geq d(x,y)$. Montrer que f est une isométrie bijective. Indication : considérer les images itérées d'un point.

Exercice 6.5 Montrer que le groupe orthogonal $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ est compact. Même question avec le groupe unitaire $\mathcal{U}_n(\mathbb{C})$

Exercice 6.6 **Nombres de Lebesgue**. Dans la suite, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Soient $n \geq 1$ un entier et $\varepsilon > 0$. On note $d_n = n$ si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et $d_n = 2n$ si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. On note $N(\varepsilon)$ la cardinal minimum d'un ε-réseau dans la boule unité de $\mathbb{K}^n$, muni d'une norme $\|.\|$ (on rappelle qu'un ε-réseau est une partie R de la boule unité de $\mathbb{K}^n$ tel que tout point de cette boule est distant d'au plus ε de R). Montrer que

$$\frac{1}{\varepsilon^{d_n}} \leq N(\varepsilon) \leq \left(1 + \frac{2}{\varepsilon}\right)^{d_n}.$$

Etablir le même résultat dans un espace vectoriel normé de dimension n.

En déduire le théorème de Riesz.

Exercice 6.7 Soit (K,d) un espace métrique compact. Montrer que les idéaux maximaux de $C(K,\mathbb{R})$ sont les idéaux annulateurs en un point, i.e. de la forme $I_x = \{f \in C(K,\mathbb{R}) |\, f(x) = 0\}$, où $x \in K$.

Exercice 6.8 **Lemme d'Auerbach** Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé de dimension $n \geq 1$. Montrer qu'il existe une base $(x_1, \ldots, x_n)$ de E telle que $\|x_1\| = \ldots = \|x_n\| = \|x_1^*\| = \ldots = \|x_n^*\| = 1$, où les x_i^* sont les formes linéaires coordonnées associées. Pour cela, on considèrera l'application du produit des n sphères unités de E dans $\mathbb{R}$ qui à $(x_1, \ldots, x_n)$ associe leur déterminant (dans une base fixée).

Soient X un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé et E un sous-espace vectoriel de dimension $n \geq 1$. On admet que toute forme linéaire sur E admet un prolongement à X de même norme. Montrer qu'il existe une projection de X sur E de norme inférieure à n.

Exercice 6.9 Soit $(E, \|.\|)$ un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé de dimension finie. $\mathcal{L}(E)$ est muni de la norme opérateur usuelle $\|f\| = \sup_{\|x\|=1} \|f(x)\|$.

Montrer que si p est un projecteur, on a $\|p\| \geq 1$. Montrer que l'ensemble des projecteurs ayant une image donnée est un convexe fermé de $\mathcal{L}(E)$.

Exercice 6.10 Soit K une partie non vide de $\mathbb{R}^n$, convexe, compacte, symétrique par rapport à 0 telle que 0 soit un point intérieur. On veut montrer qu'il existe une norme p sur $\mathbb{R}^n$ telle que K soit la boule unité de $\mathbb{R}^n$ pour p.

On introduit la jauge de Lorentz-Minkowski : $p(x) = \inf\{t > 0 | \frac{x}{t} \in K\}$. Montrer que p est une norme qui répond au problème. Pour cela,

i) Montrer que $p(x) = 0$ ssi $x = 0$.

ii) Pour x non nul, montrer que $p(x)^{-1}x \in K$.

iii) Pour x non nul et $t > 0$, montrer que $p(tx) \leq tp(x)$.

iv) Conclure.

Exercice 6.11 **Théorème d'Ascoli.** Soit K métrique compact et $\mathcal{H}$ une partie de $C(K)$. On suppose que $\mathcal{H}$ est bornée ponctuellement ($\forall x \in K$, $\sup_{\mathcal{H}} |h(x)| < \infty$) et équicontinue ($\forall \varepsilon > 0$, $\forall x \in K$, $\exists \alpha_x > 0$, $d(x,t) < \alpha_x \Rightarrow \forall h \in \mathcal{H},\ |h(x) - h(t)| < \varepsilon$).

On veut montrer que $\mathcal{H}$ est relativement compacte i.e. $\overline{\mathcal{H}}$ compacte.

1) Justifier qu'il existe $x_1, \ldots, x_n$ tels que $K = \bigcup_{1\leq i\leq n} \overset{\circ}{B}(x_i, \alpha_{x_i})$.

2) Soit D le disque fermé (du plan complexe) de centre 0 et de rayon M, où M est la borne supérieure des $|h(x_i)|$ pour $i \in \{1, \ldots, n\}$ et $h \in \mathcal{H}$. En utilisant l'application $p(h) = (h(x_1), \ldots, h(x_n))$ de $\mathcal{H}$ dans $D \times \ldots \times D$ (avec la norme sup), montrer qu'il existe $h_1, \cdots, h_m \in \mathcal{H}$ tels que pour tout $h \in \mathcal{H}$, il existe $j \in \{1, \cdots, m\}$ tel que $\sup_{1\leq i\leq n} |h_j(x_i) - h(x_i)| < \varepsilon$.

3) Montrer que $\mathcal{H} \subset \bigcup_{1\leq j\leq m} \overset{\circ}{B}(h_j, 3\varepsilon)$ puis conclure (on rappelle qu'un espace précompact et complet est compact : cf exos espaces complets).

7 Espaces connexes.

Exercice 7.1 Soient U_1 et U_2 des connexes d'un espace topologique. Montrer que la réunion est connexe si et seulement si $\overline{U_1} \cap U_2 \neq \emptyset$ ou $U_1 \cap \overline{U_2} \neq \emptyset$.

Exercice 7.2 Soit (E, d) un espace métrique connexe et non borné. Montrer que toute sphère est non vide.

Exercice 7.3 Montrer que $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}$ ne sont pas homéomorphes.

Exercice 7.4 Dans $(\mathbb{R}^2, \|.\|_2)$, quelles sont les composantes connexes de $(\mathbb{Q} \times \mathbb{Q})^c$? Celles de $\mathbb{Q}^c \times \mathbb{Q}^c$?

Exercice 7.5 Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et f une application continue et strictement croissante (resp. décroissante)

a) Montrer que l'image de f est un intervalle.

b) Montrer que l'image de $[a, b]$ est $[f(a), f(b)]$ et que celle de $]a, b[$ est $]f(a), f(b)[$.

c) Montrer que l'application $\hat{f}$ corestreinte à l'image de f est un homéomorphisme (i.e. $\hat{f} : I \to f(I)$ avec $\hat{f}(x) = f(x)$ pour $x \in I$).

Exercice 7.6 Soient I et J des intervalles de $\mathbb{R}$. En utilisant la connexité,

a) Montrer que si I est ouvert et J ne l'est pas alors I et J ne sont pas homéomorphes.

b) Montrer que si I est fermé et J ne l'est pas alors I et J ne sont pas homéomorphes.

c) Montrer que si I est fermé borné et J ne l'est pas alors I et J ne sont pas homéomorphes.

Exercice 7.7 Soit U un ouvert fermé d'un espace topologique E.

a) Montrer que si $x \in U$ alors $C(x) \subset U$, où $C(x)$ est la composante connexe de x dans E, et donc que $C(x) = C_U(x)$ ($C_U(x)$ est la composante connexe de x dans U).

b) En déduire que $U = \bigcup_{x \in U} C(x)$.

Exercice 7.8 Montrer que $GL_n^+(\mathbb{R}) = \{M |\ \det(M) > 0\}$ est connexe par arcs. Est-ce le cas de $GL_n(\mathbb{R})$? Montrer que $GL_n(\mathbb{C})$ est connexe par arcs.

Exercice 7.9 Montrer que l'ensemble des endomorphismes cycliques est un ouvert connexe (que le corps soit $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). On utilisera l'exercice précédent et l'écriture matricielle de tels endomorphismes sous forme de matrice compagnon.

Exercice 7.10 Dans $(\mathbb{R}^2, \|.\|_2)$, montrer que E est connexe puis que son adhérence est connexe mais n'est pas connexe par arcs, où $E = \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} \Big\{(\frac{1}{n}, y) |\ y \in \mathbb{R}\Big\} \cup \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} \Big\{(x, n) |\ \frac{1}{n+1} \leq x \leq \frac{1}{n}\Big\}$.

Exercice 7.11 Soit (E, d) un espace métrique. On dit que E est bien enchaîné si pour tous $x, y \in E$ et tout $\varepsilon > 0$, il existe un nombre fini de points $x_0, \ldots, x_n \in E$ tels que $x_0 = x$, $x_n = y$ et $d(x_i, x_{i+1}) < \varepsilon$ $(0 \leq i \leq n-1)$.

1) Montrer que si E est connexe, il est bien enchaîné.

Indication : considérer les ensembles $E_x = \{y \in E|$ il existe un nombre fini de points $x_0, \dots, x_n \in E$ tels que $x_0 = x$, $x_n = y$ et $d(x_i, x_{i+1}) < \varepsilon; 0 \leq i \leq n-1\}$. On montrera que les E_x sont ouverts et que les E_x distincts forment une partition de E.

2) Montrer que si E est bien enchaîné et compact alors il est connexe.

Exercice 7.12 (Septembre 2004) Soit $(E, \|.\|)$ un espace vectoriel normé de dimension supérieure ou égale à 2. On note S_E la sphère unité de E.

1) Montrer que S_E est connexe par arc.

2) Soient $R > 0$ et $a \in E$. Montrer que l'application suivante est un homéomorphisme (l'espace de départ est évidemment muni de la topologie produit)

$$\begin{array}{rcl} J \ : \ S_E \times]R, +\infty[& \longrightarrow & E \setminus \bar{B}(a, R) \\ (x, r) & \longmapsto & a + rx \end{array}$$

3) En déduire que le complémentaire d'une boule est connexe.

Exercice 7.13 (Examen 2004) Pour X un espace topologique, une extrémité de X est une application ε qui associe à tout compact C, distinct de X, une composante connexe de $X \setminus C$, telle que pour tout compact K : $C \subset K \Rightarrow \varepsilon(K) \subset \varepsilon(C)$.

1) $\mathbb{R}$ est muni de sa topologie usuelle (associée à la valeur absolue).

a) Soient a et b deux réels avec $a \leq b$. Montrer que $\mathbb{R} \setminus [a, b]$ a deux composantes connexes que l'on précisera.

Soit ε une extrémité de $\mathbb{R}$. Soit C un compact non vide de $\mathbb{R}$. On note $K = [\min C, \max C]$.

b) Justifier que K est bien défini.

c) Montrer que $\varepsilon(C) \in \{]-\infty, \min C[;]\max C, +\infty[\}$.

Pour fixer les idées, on suppose que $\varepsilon(C) =]\max C, +\infty[$. Soit C' un autre compact non vide de $\mathbb{R}$.

d) Montrer que $\varepsilon(C') =]\max C', +\infty[$. Indication : on pourra considérer $\varepsilon(C \cup C')$.

e) Conclure que $\mathbb{R}$ a deux extrémités.

2) Soit n un entier avec $n \geq 2$. L'espace $\mathbb{R}^n$ est muni de sa topologie d'espace vectoriel normé usuelle. Soient $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n$ des réels (avec $a_i \leq b_i$ pour tout i), on note $K = \prod_{i=1}^{n} [a_i, b_i]$.

Soit ε une extrémité de $\mathbb{R}^n$.

a) Montrer que $\mathbb{R}^n \setminus K$ est connexe (on pourra énoncer un argument valable en dimension n et ne le justifier qu'en dimension 2).

b) En déduire $\varepsilon(K)$.

Soit C un compact de $\mathbb{R}^n$.

c) Justifier qu'il existe un pavé compact K (comme ci-dessus) tel que $C \subset K$.

d) Montrer que $\mathbb{R}^n \setminus C$ a une seule composante connexe non bornée et que c'est $\varepsilon(C)$.

e) Combien $\mathbb{R}^n$ a-t-il d'extrémité ? (Justifier !)

3) Soit X un espace topologique compact ayant au moins deux éléments. On suppose que X admet une extrémité ε. Soit C un compact de X, distinct de X.

a) Montrer que $L = C \cup \overline{\varepsilon(C)}$ est compact.

b) Montrer que $L = X$. Indication : par l'absurde, en considérant $\varepsilon(L)$.

Soient x_1, x_2 deux éléments distincts de X.

c) Montrer qu'il existe deux ouverts disjoints non vides tels que $C' = X \setminus (U_1 \cup U_2)$ soit un compact, distinct de X.

d) Montrer que $\varepsilon(C') \subset U_1$ ou $\varepsilon(C') \subset U_2$.

e) En déduire que X n'a pas d'extrémité.

8 Espaces métriques complets.

Exercice 8.1 Montrer que $\mathbb{Q}$ (muni de la topologie de la valeur absolue) n'est pas complet.

Exercice 8.2 Montrer que $\mathbb{Q}$ n'est pas une intersection dénombrable d'ouverts de $\mathbb{R}$.

Exercice 8.3 Montrer qu'un espace de Banach n'admet pas de base (algébrique) dénombrable. (Indication : par l'absurde : on utilisera Baire avec $F_n = vect\{e_1, \cdots, e_n\}$)

Exercice 8.4 Soient $(E, \|;\|)$ et $(F, \|;\|')$ des espaces vectoriels normés. On suppose $(F, \|;\|')$ est un espace de Banach. Montrer que l'ensemble des applications linéaires continues, muni de la norme opérateur, est un espace de Banach.

Exercice 8.5 a) Soient X un ensemble et (Y, d) un espace métrique. Soient f et g deux applications de X dans Y.

On note $d_\infty(f, g) = \infty$ si $\{d(f(x), g(x)) | \, x \in X\}$ n'est pas majoré et $d_\infty(f, g) = \sup\limits_{x \in X} d(f(x), g(x))$, sinon.

a) On fixe f_0 une application de X dans Y et on pose $E = \{f : X \to Y | \, d_\infty(f, f_0) \text{ finie}\}$. Montrer que la restriction d_∞ à $E \times E$ est une distance sur E (on note encore d_∞ cette restriction).

b) Vérifier que $f_0 \in E$ et que pour tout $f_1 \in E$, $E = \{f : X \to Y | \, d_\infty(f, f_1) \text{ finie}\}$.

Montrer que si f_0 est une fonction constante, alors E est l'ensemble des applications bornées.

c) On suppose (Y, d) complet. Montrer (avec les notations précédentes) que (E, d_∞) est complet. En déduire que l'ensemble des applications bornées de X dans Y, muni de la distance d_∞, est aussi complet.

Exercice 8.6 Preuve de l'existence d'un complété.

Soit (X, d) un espace métrique. On fixe $x_0 \in X$ et on note f_0 l'application de X dans $\mathbb{R}$ (muni de la valeur absolue) qui à y associe $d(x_0, y)$. On reprend les notations de l'exercice précédent. En particulier, on note $E = \{f : X \to \mathbb{R} | \, d_\infty(f, f_0) \text{ finie}\}$.

Soit

$$\begin{array}{rccl} J : & X & \longrightarrow & E \\ & x & \longmapsto & \left| \begin{array}{ccc} X & \to & \mathbb{R} \\ y & \mapsto & d(x, y) \end{array} \right. \end{array}$$

Montrer que J est une isométrie. En déduire que X est homéomorphe à $J(X)$.

Conclure que X s'identifie à une partie dense de $\hat{X} = \overline{J(X)}$, qui est complet pour la distance d_∞. Montrer que $\hat{X}$ est unique à isométrie (bijective) près.

Exercice 8.7 Pour x et y des entiers naturels non nuls, on pose $\delta(x, y) = \dfrac{|x - y|}{xy}$ et on note $d(x, y) = |x - y|$.

1) Montrer que l'identité de $(\mathbb{N}^*, \delta)$ dans $(\mathbb{N}^*, d)$ est un homéomorphisme.

2) Montrer que la suite $(n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une suite de cauchy de $(\mathbb{N}^*, \delta)$ mais n'est pas une suite de cauchy de $(\mathbb{N}^*, d)$.

3) Est-ce que $(\mathbb{N}^*, \delta)$ est complet ? Même question pour $(\mathbb{N}^*, d)$.

Exercice 8.8 Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé.

a) Soit p un projecteur continu non nul. Montrer que $\operatorname{Ker} p$ et $\operatorname{Im} p$ sont fermés. Montrer qu'ils sont complets si et seulement si E l'est.

b) Montrer qu'une limite (en norme opérateur) de projecteurs est un projecteur. Trouver une suite de projecteurs continus non nuls ayant une limite simple nulle, resp. sans limite simple.

Exercice 8.9 On fixe $(a_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$ et $b_1, \dots, b_n$ des réels et on considère le système linéaire dont la i-ième ligne ($1 \leq i \leq n$) est

$$\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} x_j = b_i.$$

On suppose que $\displaystyle\sum_{1\leq i,j\leq n} (\delta_{i,j} - a_{i,j})^2 < 1$.

Montrer qu'il existe une unique solution. Indication : utiliser le théorème du point fixe.

Exercice 8.10 Soient $(E, \|.\|)$ un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé et F un sous-espace vectoriel de E. On notera $\dot{x}$ la classe de $x \in E$, dans E/F. On considère l'application

$$\begin{array}{rcl} N \ : \ E/F & \longrightarrow & \mathbb{R}^+ \\ \dot{x} & \longmapsto & \inf\limits_{y\in\dot{x}} \|y\| \end{array}$$

1)i) Montrer que N est une semi-norme sur E/F (c'est à dire que N vérifie les axiomes d'une norme sans vérifier $N(v) = 0 \Rightarrow v = 0$).

ii) Décrire les $x \in E$ tels que $N(\dot{x}) = 0$. A quelle condition (nécessaire et suffisante) sur F, $(E/F, N)$ est un espace vectoriel normé ?

Dans toute la suite, on suppose que cette condition sur F est remplie, $(E/F, N)$ est donc un espace vectoriel normé.

2) Montrer que la surjection canonique π est continue.

3) On suppose dans cette question que F admet un sous-espace supplémentaire G de dimension finie. On note P la projection canonique de E sur G. On note f l'application de $(E/F, N)$ dans $(E, \|.\|)$ qui à $\dot{x}$ associe $P(x)$.

i) Montrer que f est bien définie, linéaire et continue.

ii) En déduire que P est continue.

4) On suppose dans cette question que E est un espace de Banach. On considère une série de terme général $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ normalement convergente dans $(E/F, N)$.

a) Montrer qu'il existe une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de E telle que pour tout entier n, $\pi(x_n) = v_n$ et $\|x_n\| \leq N(v_n) + 2^{-n}$.

b) Montrer que la série $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n$ converge dans $(E, \|.\|)$ puis que la série $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} v_n$ converge dans $(E/F, N)$.

c) Montrer que $(E/F, N)$ est un espace de Banach.

Exercice 8.11 On dit qu'une partie d'un espace métrique est précompacte si étant donné $\varepsilon > 0$, s'il existe un recouvrement fini de cette partie par des boules ouvertes de rayon ε. Soit (E, d) un espace métrique.

1) Montrer qu'une partie précompacte est bornée.

2) Soit $A \subset E$. Montrer que A est précompact si et seulement si $\bar{A}$ est précompact.

3) Soit $A \subset E$. On veut montrer que A est compact si et seulement si A est complet et précompact. Pour cela ,

i) Montrer que si A est compact, alors A est complet et précompact.

ii) Réciproque : soit $(a_n)_{\mathbb{N}}$ une suite de A. Construire une suite décroissante de parties infinies $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathbb{N}$ et une suite $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que la boule ouverte de centre c_n et de rayon 2^{-n} contienne $\{a_k |\, k \in I_n\}$ et la boule ouverte de centre c_{n+1} et de rayon $2^{-(n+1)}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Conclure.

Exercice 8.12 Soit E l'espace des fonctions continues sur $[0,1]$ à valeurs réelles, muni de la norme infinie. Pour tout entier $n \geq 1$, on pose

$$A_n = \{f \in E |\, \forall t \in [0,1],\, \exists s \in [0,1],\, |f(t) - f(s)| > n|t-s|\}.$$

1) Montrer que pour tout n, l'intérieur de A_n est dense dans E. Pour cela, procéder comme suit : on fixe $f \in E$ et $\varepsilon > 0$. Il existe $\eta > 0$ tel que pour tous $x, y \in [0,1]$ avec $|x-y| \leq \eta$, on ait $|f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$ (justifier !). On choisit un entier $m \geq \max(\eta^{-1}, 3n\varepsilon^{-1})$ et on pose $x_k = \dfrac{k}{m}$ pour $k \in \{0, \ldots, m\}$. On définit alors la fonction g affine par morceaux sur $[x_k, (x_k + x_{k+1})/2]$ et $[(x_k + x_{k+1})/2, x_{k+1}]$ telle que $g(x_k) = f(x_k)$ et $g((x_k + x_{k+1})/2) = f((x_k + x_{k+1})/2) + 2\varepsilon/3$ pour tout k.

a) Montrer que $g \in A_{2n}$.

b) Montrer que $\|f - g\|_\infty \leq \varepsilon$.

c) Montrer que la boule ouverte de centre g et de rayon $\rho = \dfrac{n}{8m}$ est incluse dans A_n.

2) En déduire que l'ensemble des fonctions continues sur $[0,1]$, dérivables en aucun point, est dense dans E.

Exercice 8.13 Théorème de la limite simple de Baire. Soient X un espace de Banach et Y normé. On suppose qu'une suite $(f_n)_n$ de fonctions continues de X dans Y converge simplement vers f. On veut montrer que l'ensemble $C(f)$ des points de continuité de f est dense dans X.

On introduit la fonction $\omega(x) = \inf\limits_{r>0} \sup\{\|f(u) - f(v)\|;\ u, v \in \overset{\circ}{B}(x,r)\}$ et l'ensemble $O_\varepsilon = \omega^{-1}([0, \varepsilon[)$.

1) Montrer que $x \in C(f) \Leftrightarrow \omega(x) = 0$ et que $\forall \varepsilon > 0$, O_ε est un ouvert de X.
En déduire $C(f) = \bigcap\limits_{p\in\mathbb{N}^*} O_{\frac{1}{p}}$.

2) On fixe $\varepsilon, R > 0$ et un $x_0 \in X$. On note B_R la boule fermée de centre x_0 de rayon R.

a) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $F_n = \{x \in B_R |\ \forall m \geq n,\ \|f_n(x) - f_m(x)\| \leq \varepsilon\}$ est fermé dans B_R.

b) Montrer que $B_R = \cup_{n\geq 1} F_n$ et en déduire qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que F_{n_0} est d'intérieur non vide (Indication : on utilisera Baire).

c) En déduire qu'il existe $x_1 \in B_R$ et $r > 0$ tel que $\bar{B}(x_1, r) \subset B_R$ et tel que :

$$\forall x \in \bar{B}(x_1, r),\ \|f(x) - f_{n_0}(x)\| \leq \varepsilon.$$

d) En utilisant la continuité de f_{n_0} en x_1, montrer qu'il existe $s > 0$ tel que :
$\forall x \in \bar{B}(x_1, s)$, $\|f(x) - f(x_1)\| < 3\varepsilon$ puis que $\omega(x_1) < 7\varepsilon$. En déduire que $O_{7\varepsilon} \cap B_R \neq \emptyset$.

3) Montrer que : $\forall \varepsilon > 0$, O_ε est dense dans X.

4) Conclure.

Application : montrer que pour toute fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dérivable, f' est continue sur un ensemble dense de $\mathbb{R}$. (Indication : utiliser ce qui précède et considérer une suite de taux d'accroissements adequat).

9 Espaces de Hilbert.

Exercice 9.1 a) Montrer que dans tout espace de Hilbert H, on a l'identité du parallélogramme

$$\forall n \geq 1,\ \forall x_1, \cdots, x_n \in H,\ 2^{-n} \sum_{\substack{\varepsilon_i = \pm 1 \\ 1 \leq i \leq n}} \|\varepsilon_1 x_1 + \cdots + \varepsilon_n x_n\|^2 = \|x_1\|^2 + \cdots + \|x_n\|^2.$$

b) En déduire que ℓ^p n'est pas isomorphe (i.e. n'est linéairement homéomorphe) à ℓ^2 si $p \neq 2$. Pour cela, on considèrera un isomorphisme (bicontinu !) u entre ℓ^p et ℓ^2 et on analysera son action sur la base canonique : $e_j = (\delta_{n,j})_{n \geq 1}$.

Exercice 9.2 Soient H un espace de Hilbert et F un sous-espace fermé de H non réduit à $\{0\}$. Soit P une projection de H sur F; montrer qu'on a l'équivalence entre

a) P est la projection orthogonale sur F.

b) $\|P\| = 1$.

c) $\forall x \in H$, $|\langle P(x), x\rangle| \leq \|x\|^2$.

(Indication : pour montrer $(c) \Rightarrow (a)$, on pourra introduire le vecteur $y + \varepsilon e^{-i\theta} z$ où $y \in F$, $z \in F^{\perp}$, $\varepsilon > 0$ et $e^{i\theta}$ est le signe complexe de $\langle P(z), y\rangle$.)

Exercice 9.3 On note ℓ^2 l'espace des suites réelles de carré sommable :

$$\ell^2 = \{(a_n)_{n\in\mathbb{N}} | \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n^2 \text{ converge}\}.$$

On munit cet espace de la norme : $\|a\|_2 = \Big(\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n^2\Big)^{\frac{1}{2}}$, pour $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^2$.

1) Montrer que c'est un espace de Hilbert, pour le produit scalaire défini pour $a, b \in \ell^2$ par

$$\langle a, b\rangle = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n b_n.$$

2) On fixe $\alpha = (\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels strictement positifs et on considère

$$K_\alpha = \{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^2 | \forall n \in \mathbb{N},\ |x_n| \leq \alpha_n\}.$$

i) Montrer que K_α est convexe et fermé. Indication : pour le caractère fermé, on utilisera (et justifiera) la continuité de la projection sur chaque coordonnée.

ii) Montrer que si K_α est borné alors $\alpha \in \ell^2$. Indication : utiliser une suite d'éléments de ℓ^2 dont les termes sont égaux à ceux de α jusqu'au rang N puis nuls.

iii) Montrer que $\alpha \in \ell^2$ si et seulement si K_α est compact.