SUITES - SÉRIES - INTÉGRALES

Exercices

2018- 2019

U N I V E R S I T É D'A R T O I S

Licence 2
Mathématiques

P. Lefèvre

Licence Mathématiques

Exercices Séries-Intégrales

TD LM2
Pascal Lefèvre

Il est important que chercher les exercices à l'avance pour profiter réellement des TD.

Par ailleurs, une banque de sujets d'examen, avec corrigés des sessions 1, est disponible à l'adresse:

http://lefevre.perso.math.cnrs.fr/PagesPerso/enseignement/Archives/ArchivSI.htm

1 Révisions : Intégration

Exercice 1.1

Calculer les intégrales suivantes:

a) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{(x+1)^2(x+2)}\, dx\,.$

b) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(x)\, dx\,.$

c) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+x^3}\, dx\,.$

d) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+x^4}\, dx\,.$

e) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{(x+1)(x^2-4)(x^2-9)}\, dx\,.$

f) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan(x)\, dx\,.$

g) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos(x)}\, dx\,.$

h) $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin(x)}\, dx\,.$

i) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x}{\cos^2(x)}\, dx\,.$

j) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+\sin(x)}\, dx$ puis $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(x)}{1+\sin(x)}\, dx\,.$

k) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{2\sin(x)+3\cos(x)}{3\sin(x)+2\cos(x)}\, dx\,.$

l) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+\sin^3(x)+\cos^3(x)}\, dx\,.$

m) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos(x)(\sin(x)+\cos(x))}\, dx\,.$

Exercice 1.2

Soit $x \in [0,1[$. Calculer $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1-x\cos^2(s)} ds.$

2 Révisions Développements Limités

Exercice 2.1

Calculer les limites des fonctions suivantes en $+\infty$:

1) $f(x) = x^2\big(1+\dfrac{1}{x}\big)^x - ex^3\ln\big(1+\dfrac{1}{x}\big)$.

2) $f(x) = \Big(\dfrac{a^{\frac{1}{x}}+b^{\frac{1}{x}}+c^{\frac{1}{x}}}{3}\Big)^x$.

3) $f(x) = x^3\Big(\exp(\dfrac{1}{x-3}) + \exp(\dfrac{1}{x-1}) + \exp(\dfrac{1}{x+1}) + \exp(\dfrac{1}{x+3}) - 4\exp(\dfrac{1}{x})\Big)$.

Exercice 2.2

Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty}(x+1)^{1+\frac{1}{x+1}} - x^{1+\frac{1}{x}}$.

Exercice 2.3

Soit n un entier naturel non nul.

1) Montrer que l'équation $\tan(t) = t$ admet une unique solution dans l'intervalle $]n\pi, n\pi+\frac{\pi}{2}[$.

On notera cette solution t_n.

2) Montrer que $\dfrac{t_n}{n}$ a une limite quand n tend vers $+\infty$ et la préciser.

3) (i) Etablir une relation entre t_n et $\arctan(t_n)$.

(ii) En déduire une relation du type $t_n = an+b+\varepsilon_n$ avec $\varepsilon_n \to 0$, où on déterminera a et b.

4) (i) Montrer qu'il existe une suite bornée $(\beta_n)_{n\geqslant 1}$ telle que $\dfrac{1}{t_n} = \dfrac{1}{n\pi} + \dfrac{\beta_n}{n^2}$.

(ii) En déduire un développement du type: $t_n = an+b+\dfrac{c}{n}+\dfrac{\alpha_n}{n^2}$, avec $(\alpha_n)_{n\geqslant 1}$ bornée, où on déterminera c.

Exercice 2.4

Déterminer la limite quand x tend vers 0 de

$$f(x) = \frac{\sin(\mathrm{sh}x) - \mathrm{sh}(\sin x)}{x^7}.$$

3 Séries à termes positifs

Exercice 3.1

Etudier la série de terme général

n) $u_n = \dfrac{n+1}{3n^3 - 2n^2 + 15}$.

o) $u_n = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n - 1 \quad$ où $n \geqslant 1$.

a) $u_n = e^{-\sqrt{n}}$.

b) $u_n = \dfrac{n^3}{2^n}$.

c) $u_n = \dfrac{1}{n^{1+1/n}} \quad$ où $n \geqslant 1$.

d) $u_n = \dfrac{1}{\sqrt{n-1}} - \dfrac{2}{\sqrt{n}} + \dfrac{1}{\sqrt{n+1}} \quad$ où $n \geqslant 2$.

e) $u_n = \left(1 - \dfrac{1}{n}\right)^{n^2} \quad$ où $n \geqslant 1$.

f) $u_n = \dfrac{n^\alpha}{(1+a)\dots(1+a^n)} \quad$ où $a > 0$ et $\alpha \in \mathbb{R}$.

Indication: on pourra séparer les cas $a \geqslant 1$ et $a < 1$ auquel cas, on justifiera que la suite $\big((1+a)\dots(1+a^n)\big)$ converge.

g) $u_n = e^{an^2}\left(1 - \dfrac{a}{n}\right)^{n^3} \quad$ où $n \geqslant 1$ et $a > 0$.

h) $u_n = \dfrac{n!r^n}{n^n} \quad$ où $n \geqslant 1$ et $0 < r < \mathrm{e}$

i) $u_n = \dfrac{3^n (n!)^2}{(2n)!}$.

Exercice 3.2

Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^+$. On considère la série de Bertrand: $u_n = \dfrac{1}{n^\alpha\big(\ln(n)\big)^\beta} \quad$ où $n \geqslant 2$.

Montrer que cette série converge si et seulement si $\Big[\alpha > 1 \quad \text{ou} \quad [\alpha = 1 \text{ et } \beta > 1]\Big]$

Indication: dans le cas $\alpha \neq 1$, on pourra comparer à une série de Riemann. Si $\alpha = 1$ et $\beta \neq 1$, on pourra considérer $v_{n+1} - v_n$ où $v_n = (\ln(n))^{1-\beta}$ puis adapter cette idée si $\beta = 1$.

Exercice 3.3

Justifier la convergence des séries de terme général u_n, et calculer la somme de la série, avec

a) $u_n = \ln\left(1 - \dfrac{1}{n^2}\right)$ (où $n \geqslant 2$).

b) $u_n = \dfrac{2n-1}{n^3 - 4n}$ (où $n \geqslant 3$). *Indication: on pourra décomposer en éléments simples u_n sous la forme $\frac{\alpha}{n} + \frac{\beta}{n-2} + \frac{\gamma}{n+2}$.*

c) $u_n = \arctan\left(\dfrac{1}{n^2+n+1}\right)$ (où $n \in \mathbb{N}$). *Indication: on pourra justifier puis utiliser la formule* $\arctan(x+1) - \arctan(x) = \arctan\left(\dfrac{1}{x^2+x+1}\right)$.

Exercice 3.4

Critère de Raabe-Duhamel. Soit (a_n) une suite de réels strictement positifs telle que au voisinage de l'infini $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = 1 + \dfrac{\alpha}{n} + o\left(\dfrac{1}{n}\right)$. Montrer que si $\alpha < -1$, la série $\sum a_n$ converge; si $\alpha > -1$, la série $\sum a_n$ diverge et que pour $\alpha = -1$, on ne peut conclure.

Exercice 3.5

Soit (a_n) une suite de réels positifs.

1) On suppose que la série $\sum a_n$ converge. Etudier la convergence des séries de terme général

a) a_n^2. b) $\dfrac{\sqrt{a_n}}{n}$. c) $\dfrac{a_n}{1+a_n}$.

2) On suppose que la série $\sum a_n$ diverge. Etudier la convergence des séries de terme général

a) a_n^2. b) $\dfrac{a_n}{1+a_n}$. c) $\dfrac{a_n}{1+na_n}$. d) $\dfrac{a_n}{1+n^2a_n}$.

e) $\dfrac{a_n}{a_0+\ldots+a_{n-1}}$ *Indication : comparer par exemple* $(x-y)/y$ *à* $\ln(x)-\ln(y)$*).*

Exercice 3.6

Soit $\mathscr{P}$ l'ensemble des nombres premiers. Montrer que $\displaystyle\sum_{p\in\mathscr{P}} \frac{1}{p}$ diverge.

Indication : on s'intéressera au produit $\displaystyle\prod_{\substack{p\in\mathscr{P}\\ p\leqslant N}} \left(1-\frac{1}{p}\right)^{-1}$.

Exercice 3.7

Soit (a_n) une suite décroissante de réels positifs telle que la série $\sum a_n$ converge.

a) Montrer que $\lim na_n = 0$.

b) Montrer que ce résultat est faux en général si la suite (a_n) n'est pas supposée décroissante.

c) Soit (u_n) une suite décroissante de réels strictement positifs. On suppose qu'il existe (n_k) strictement croissante telle que $\forall k \geqslant 1$, $u_{n_k} \geqslant \dfrac{1}{n_k}$. Montrer que la série $\displaystyle\sum_n u_n$ diverge.

Exercice 3.8

(*Difficile*) Soit $q_1(n)$ le nombre de chiffres de $n \geqslant 1$ dans son écriture décimale. On pose $q_k = q_1 \circ q_{k-1}$ pour $k \geqslant 2$. Quelle est la nature de la série de terme général

$$a_n = \frac{1}{nq_1(n) \dots q_n(n)} \ ?$$

Même question en passant l'énoncé de la base 10 à une base $b \geqslant 2$.

4 Séries quelconques

Exercice 4.1

Etudier la convergence des séries de terme général u_n où

a) $\forall n \geqslant 1\,, \quad u_n = \cos\left(\dfrac{\pi n^2}{2n^2+an+1}\right)$ où $a \geqslant 0$.

b) $\forall n \geqslant 1\,, \quad u_n = \sin\left(\dfrac{1}{n}\right)\cdot$

c) $\forall n \geqslant 1\,, \quad u_n = 1-\cos\left(\dfrac{1}{n}\right)\cdot$

d) $\forall n \geqslant 1\,, \quad u_n = \dfrac{1}{\sqrt[3]{n}} - \sin\left(\dfrac{1}{\sqrt[3]{n}}\right)\cdot$

e) $\forall n \geqslant 1\,, \quad u_n = \ln\Big(\cos\left(\dfrac{1}{n}\right)\Big).$

f) $\forall n \geqslant 1\,, \quad u_n = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n^2} z^n$ pour $z \in \mathbb{C}$. *On fera attention au cas* $|z| = 1/\mathrm{e}$.

Exercice 4.2

Etudier la convergence des séries de terme général u_n où

a) $\forall n \geqslant 1\,, \quad u_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\cdot$

b) $\forall n \geqslant 2\,, \quad u_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n}\cdot$

c) $\forall n \geqslant 1\,, \quad u_n = \dfrac{\sin(n)}{n^2}\cdot$

d) $\forall n \geqslant 1\,, \quad u_n = \dfrac{\sin(n)}{\sqrt{n}}\cdot$

e) $\forall n \geqslant 2\,, \quad u_n = \ln\left(1+\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)\cdot$

f) $\forall n \geqslant 2\,, \quad u_n = \dfrac{\sin\big(\ln(n)\big)}{n}\cdot$ *Indication: on cherchera à nier le critère de Cauchy en regardant une somme sur une tranche bien choisie où le sinus varie “peu”.*

Exercice 4.3

Justifier la convergence et calculer la somme de la série dont le terme général u_n est donné par

$$\forall n \in \mathbb{N}\,, \qquad u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(n-k)!\,2^k}\cdot$$

Exercice 4.4

Etudier la convergence des séries de terme général u_n où

a) $\forall n \geqslant 1\,,\quad u_n = \dfrac{\sin(an)}{n}$ avec $a \in \mathbb{R}$.

b) $\forall n \geqslant 1\,,\quad u_n = \dfrac{\cos(an)}{n}$ avec $a \in \mathbb{R}$.

c) La série de terme général $u_n = \dfrac{\sin(n)}{n}$ (où $n \geqslant 1$) est-elle divergente, semi-convergente, absolument convergente ?

Indication: on pourra remarquer que $|\sin(n)| \geqslant (\sin(n))^2$.

Exercice 4.5

Justifier la convergence de la série dont le terme général u_n est donné par

$$\forall n \in \mathbb{N}\,, \qquad u_n = (-1)^n \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(k+1)^{1/2}(n-k+1)^{3/2}}\,.$$

Est-elle absolument convergente ?

Exercice 4.6

Etudier la convergence des séries de terme général u_n où

a) $\forall n \geqslant 1\,,\quad u_n = (-1)^n\Big(\mathrm{e} - \Big(1+\dfrac{1}{n}\Big)^n\Big)$.

b) $\forall n \in \mathbb{N}\,,\quad u_n = \sin\big(\sqrt{1+n^2\pi^2}\big)$.

c) $\forall n \in \mathbb{N}\,,\quad u_n = \sin\big(n!\pi\mathrm{e}\big)$.

d) $\forall n \geqslant 1\,,\quad u_n = \dfrac{(-1)^{n+1}}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k+1}}{k} = \frac{(-1)^{n+1}}{n}\Big(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{(-1)^{n+1}}{n}\Big)\,.$

Exercice 4.7

Soit $a_n \in \mathbb{C}$ (où $n \in \mathbb{N}$) le terme général d'une série convergente.

a) Montrer que $\displaystyle\sum_{n=1}^{N} n a_n = o(N)$.

Indication: on pourra effectuer une transformation d'Abel et utiliser Cesáro.

b) On suppose désormais que les a_n sont des réels positifs. On veut montrer que

$$\mathrm{Card}\,\big\{\mathrm{k} \in \mathbb{N} \mid \mathrm{a_k} \geqslant 1/\mathrm{N}\big\} = \mathrm{o(N)} \quad \text{quand N} \to +\infty$$

(i) Justifier que, à $N \geqslant 1$ fixé, $\big\{k \in \mathbb{N} \mid a_k \geqslant 1/N\big\}$ est un ensemble fini.

(ii) Justifier que ces ensembles forment une suite croissante avec N.

(iii) Conclure en utilisant le a.

Exercice 4.8

Commutative convergence. *(exercice délicat).*

On considère une suite de complexes $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

a) Montrer que la série $\sum a_n$ est absolument convergente *si et seulement si* pour toute bijection $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, la série $\sum a_{\varphi(n)}$ converge. En cas de convergence, montrer que de plus

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_{\varphi(n)} = \sum_{n=0}^{+\infty} \sum a_n$$

b) Montrer que la série $\sum a_n$ est absolument convergente *si et seulement si* pour toute sous-suite (p_n), la série $\sum a_{p_n}$ converge.

c) (*Th. Riemann*). On suppose que $\sum |a_n|$ diverge. Montrer que pour tout $\theta \in \mathbb{R}$ (éventuellement $\theta = \pm\infty$), il existe une bijection $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telle que la série $\sum a_{\varphi(n)}$ converge vers θ.

Exercice 4.9

Etudier la convergence des séries de terme général $c_n = \dfrac{(-1)^{E(\sqrt{n})}}{\sqrt{n}}$ et $u_n = \dfrac{(-1)^{E(\sqrt{n})}}{n}$ pour $n \geqslant 1$ (où $E(x)$ désigne la partie entière de x).

Exercice 4.10

On s'intéresse à $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^{k-1} \mathrm{E}\Big(\frac{n}{k}\Big)$ pour $n \in \mathbb{N}$ (où $E(x)$ désigne la partie entière de x).

a) Justifier l'existence de u_n pour $n \in \mathbb{N}$.

On cherche désormais un équivalent de u_n.

b) Commencer par justifier que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \frac{n}{k} \sim nL$ où $L > 0$ est un réel que l'on précisera.

c) Montrer que pour $n, N \geqslant 1$, les quantités $\Big|\displaystyle\sum_{k=N}^{+\infty} (-1)^{k-1} \frac{1}{n} \mathrm{E}\Big(\frac{n}{k}\Big)\Big|$ et $\Big|\displaystyle\sum_{k=N}^{+\infty} (-1)^{k-1} \frac{1}{k}\Big|$ sont inférieures à $\dfrac{1}{N}$.

d) Conclure que $u_n \sim nL$.

Exercice 4.11

Justifier la convergence de la série de terme général $u_n = \ln\Big(\cos\Big(\dfrac{x}{2^n}\Big)\Big)$ (où $n \in \mathbb{N}$ et $0 < x < \pi/2$) et calculer la somme de la série.

Indication: utiliser que $\sin(2t) = \cdots$.

Exercice 4.12

(*Difficile*) Justifier la convergence de la série de terme général $u_n = (-1)^n \dfrac{\ln(n)}{n}$ pour $n \geqslant 1$ et calculer $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{\ln(n)}{n}$.

Indication: pour le calcul, on considèrera les sommes partielles d'ordre pair que l'on explicitera et on utilisera notamment le développement asymptotique des sommes partielles de la série harmonique. On fera aussi apparaître une somme de Riemann.

5 Intégrales généralisées

Exercice 5.1

Déterminer la nature des intégrales suivantes

a) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1+t^2}{1+t+t^4}\,dt\,.$

b) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1+\sqrt{t}}{1+t+t^2}\,dt\,.$

c) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \sin(x)\,dx\,.$

d) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1+\sqrt{t}}{1+2t}\,dt\,.$

e) $\displaystyle\int_0^{1} \frac{1}{\sqrt{\ln(2-t)}}\,dt\,.$

f) $\displaystyle\int_0^{1} \frac{\sqrt{u}}{\ln(1-u)}\,du\,.$

g) $\displaystyle\int_0^{1} \frac{1}{\sqrt{|\ln(y)|}}\,dy\,.$

h) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{\sqrt{t}}\,dt\,.$

i) $\displaystyle\int_0^{1} \frac{1}{1-\sqrt{t}}\,dt\,.$

j) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-s^q}\,ds \quad$ où $q \in \mathbb{R}$.

k) $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{1-4t+4t^2}\,dt\,.$

l) $\displaystyle\int_0^{1} \frac{\sin(t)}{t^2}\,dt\,.$

m) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t^2}\,dt\,.$

n) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t^{\frac{3}{2}}}\,dt\,.$

o) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(\theta)}{\sqrt{\theta}}\,d\theta\,.$

p) $\displaystyle\int_0^{+\infty} 2^{-x}x^9\,dx\,.$

q) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t\ln(t)}{(1+t^2)^\alpha}\,dt \quad$ où $\alpha \in \mathbb{R}$.

r) $\displaystyle\int_0^{1} \frac{1}{(\tan(x)-x)^\alpha}\,dx \quad$ où $\alpha \in \mathbb{R}$.

s) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^\alpha - 1}{(\ln(x))^\alpha}\, dx$ où $\alpha \in \mathbb{R}$.

t) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\arccos(u)}\, du$. *Indication: on pourra par exemple déterminer un D.L. de arccos au voisinage de* 1.

Exercice 5.2

Jusitifier la convergence et calculer les intégrales suivantes

a) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2+2t+t^2}\, dt$.

b) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^2}{1+t^4}\, dt$.

c) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\tan(x)}\, dx$. *Indication: faire le changement de variable:* $u = \sqrt{\tan(x)}$

d) $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{u^2-1}\, du$.

e) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{(x+1)(x+2)(x+3)}\, dx$.

f) $\displaystyle\int_2^3 \frac{1}{\sqrt{(3-x)(x-2)}}\, dx$. *Indication: on pourra faire le changement de variable* $x \mapsto \sqrt{3-x}$

g) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln(t)}{1+t^2}\, dt$. *Indication: on pourra couper l'intégrale en deux avec la borne* 1 *puis faire un changement de variable* $t \mapsto 1/t$

h) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(t)}{\sqrt{1-t}}\, dt$. *Indication: faire un changement de variable. Sinon, on pourra aussi essayer une I.P.P.*

i) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(1+x^2)(4+x^2)}\, dx$.

j) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(4+x^2)^3}\, dx$.

Exercice 5.3

On souhaite calculer l'intégrale $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^4+t^8}\, dt$

(mais on n'a pas le courage de faire la décomposition en éléments simples avec un dénominateur de degré 8).

a) Justifier la convergence de I.

b) Montrer que $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^6}{1+t^4+t^8}\, dt$. *Indication: faire un changement de variable.*

c) En déduire que $I = \displaystyle\frac{1}{2}\int_0^{+\infty} \frac{1+t^2}{1+t^2+t^4}\, dt$. *Indication: faire une demi-somme.*

d) Conclure.

Exercice 5.4

Intégrales de Bertrand. Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

a) Pour quelles valeurs de α et β, l'intégrale $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha (\ln(t))^\beta}\, dt$ est convergente ?

b) Pour quelles valeurs de α et β, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{t^\alpha |\ln(t)|^\beta}\, dt$ est convergente ?

Exercice 5.5

Soit f continue sur $\mathbb{R}^+$. On suppose que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)\, dx$ est convergente.

a) On suppose dans cette question que $\lim\limits_{+\infty} f(t)$ existe (on la note ℓ). Montrer que nécessairement $\ell = 0$.

b) Donner un exemple où f n'a pas de limite en $+\infty$.

c) On suppose dans cette question que f est uniformément continue. Montrer que $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t) = 0$.

Indication: pour $\varepsilon > 0$, et avec le $\delta(\varepsilon)$ associé par uniforme continuité, écrire le critère de Cauchy pour l'intégrale avec un ε' bien choisi à l'aide de ε et $\delta(\varepsilon)$.

Exercice 5.6

Déterminer $\displaystyle\lim_{x\to 1^+} \int_x^{x^2} \frac{1}{\ln(t)}\, dt$.

Exercice 5.7

Soient f continue sur $\mathbb{R}^+$ et deux réels $b > a > 0$. On suppose que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{f(x)}{x}\, dx$ est convergente.

Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{f(ax) - f(bx)}{x}\, dx$ est convergente et la calculer.

Exercice 5.8

Intégrale de Dirichlet.

a) Rappeler pourquoi l'intégrale $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x}\, dx$ converge.

b) Justifier que $I = \displaystyle\lim_{n\to+\infty} I_n$ où $I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin\big((2n+1)x\big)}{x}\, dx$.

c) On considère la fonction Φ définie sur $[0, \pi/2]$ par $\Phi(0) = 0$ et $\Phi(x) = \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{\sin(x)}$ lorsque $x \in]0, \pi/2]$.

(i) Montrer que Φ est de classe $\mathscr{C}^1$.

(ii) (Lemme Riemann-Lebesgue) Montrer que $\displaystyle\lim_{\lambda\to+\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \Phi(x) \sin(\lambda x)\, dx = 0$.

(iii) En déduire que $I = \lim\limits_{n\to+\infty} J_n$ où $J_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin\big((2n+1)x\big)}{\sin(x)}\, dx$.

(iv) Montrer qu'en fait la suite (J_n) est constante.

d) Conclure.

Exercice 5.9

Soit $r > 0$.

a) Justifier l'existence de $I(r) = \displaystyle\int_0^{\pi} \ln\left|1 - r\mathrm{e}^{i\theta}\right| d\theta$.

b) Montrer que $I(r) = \displaystyle\int_{-\pi}^{0} \ln\left|1 - r\mathrm{e}^{i\theta}\right| d\theta = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \ln\left|1 - r\mathrm{e}^{i\theta}\right| d\theta$.

c) Montrer que $I(r) = \displaystyle\int_0^{\pi} \ln\left|1 + r\mathrm{e}^{i\theta}\right| d\theta = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \ln\left|1 - r^2\mathrm{e}^{2i\theta}\right| d\theta$. *Indication: faire un changement de variable.*

d) En déduire que $I(r) = \dfrac{1}{2} I\left(r^2\right)$.

e) On suppose dans cette question que $r = 1$.

(i) Calculer $I(1)$.

(ii) En déduire $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin(x))\, dx$.

f) Montrer que $I(r) = I\left(\dfrac{1}{r}\right) + \pi\ln(r)$.

g) Quelle est la valeur de $I(r)$?

Exercice 5.10

Intégrales de Gauss.

On va montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\, dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

a) Justifier que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\, dt$ converge.

b) Rappeler pourquoi on a pour tout $x > -1$: $\ln(1+x) \leqslant x$.

c) Soit $n \geqslant 1$, un entier.

(i) Montrer que pour tout $t \in [0, \sqrt{n}]$, on a $\left(1 - \dfrac{t^2}{n}\right)^n \leqslant \mathrm{e}^{-t^2} \leqslant \left(1 + \dfrac{t^2}{n}\right)^{-n}$.

(ii) En déduire que

$$\sqrt{n}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos(u))^{2n+1}\, du \leqslant \int_0^{\sqrt{n}} \mathrm{e}^{-t^2}\, dt \leqslant \sqrt{n}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos(u))^{2n-2}\, du.$$

Indication: faire des changements de variable. Par exemple: $t = \sqrt{n}\sin(u)$ pour le membre de gauche et $t = \sqrt{n}\tan(u)$ pour le membre de droite

d) Conclure en utilisant les résultats du cours sur les intégrales de Wallis et la formule de Stirling.

Exercice 5.11

Transformée de Laplace.

Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}^+$. On s'intéresse à $\mathscr{L}[f](s) = \displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\mathrm{e}^{-st}\,dt$.

1) On suppose que f est bornée.

a) Justifier que $\mathscr{L}[f](s)$ est bien défini pour tout $s \in \mathbb{R}^{+*}$.

b) Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ avec $Re\big(\lambda\big) \geqslant 0$ et $\mathrm{e}_\lambda(t) = \mathrm{e}^{-\lambda t}$. Calculer $\mathscr{L}[\mathrm{e}_\lambda]$.

c) Calculer $\mathscr{L}[\sin]$.

2) On suppose que $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\,dt$ converge.

a) Justifier que $\mathscr{L}[f](s)$ est bien défini pour tout $s \in \mathbb{R}^+$.

Soit $R(x) = \displaystyle\int_x^{+\infty} f(t)\,dt$ où $x \in \mathbb{R}^+$. On veut montrer que $\displaystyle\lim_{s\to 0^+} \mathscr{L}[f](s) = I$.

b) Justifier que R est bien définie et de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^+$. Préciser sa dérivée. Que vaut $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} R(x)$?

c) A l'aide d'une intégration par partie (prudente), montrer que pour tout $s > 0$, on a $\mathscr{L}[f](s) = I - s\displaystyle\int_0^{+\infty} R(t)\mathrm{e}^{-st}\,dt$.

d) Soit $\varepsilon > 0$.

(i) Montrer qu'il existe $x_0 > 0$ tel que pour tout $s > 0$: $\left|s\displaystyle\int_{x_0}^{+\infty} R(t)\mathrm{e}^{-st}\,dt\right| \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2}$.

(ii) (avec le même x_0 que précédemment) Montrer qu'il existe $s_0 > 0$ tel que pour tout $s \in]0, s_0]$: $\left|s\displaystyle\int_0^{x_0} R(t)\mathrm{e}^{-st}\,dt\right| \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2}$.

e) Conclure.

6 Autres exercices.

Exercice 6.1

Quelle est la nature de la série de terme général $u_n = \displaystyle\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$?

Exercice 6.2

On considère $\zeta(s) = \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^s}$.

a) Rappeler pour quels réels s, la quantité $\zeta(s)$ est bien définie.

b) Montrer que $\displaystyle\lim_{s\to 1^+} (s-1)\zeta(s) = 1$.

Exercice 6.3

Soit $a > 0$. On s'intéresse à $\Phi(a) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a}{n^2 + a^2}$.

1) Justifier que Φ est définie sur $]0, +\infty[$.

2) A l'aide d'une comparaison série-Intégrale, montrer que $\displaystyle\lim_{a\to+\infty} \Phi(a) = \frac{\pi}{2}$.

Exercice 6.4

Pour $x \in \mathbb{R}^{+*}$, on considère $f(x) = \dfrac{\cos\left(x^{1/3}\right)}{x^{2/3}}$.

1) On s'intéresse à $u_n = \displaystyle\int_n^{n+1} f(t)\, dt - f(n)$ où $n \geqslant 1$.

a) Justifier que u_n est bien défini pour tout $n \geqslant 1$.

b) En utilisant le théorème des accroissements finis, montrer que $u_n = O\left(\dfrac{1}{n^{4/3}}\right)$.

c) Est-ce que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} u_n$ converge ?

2) En déduire la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} f(n)$.

Exercice 6.5

Soit φ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[1, +\infty[$ telle que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \left|\varphi'(t)\right| dt$ converge. Pour $n \geqslant 1$, on pose $u_n = \displaystyle\int_n^{n+1} \varphi(t)\, dt - \varphi(n)$.

1) Montrer que $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} u_n$ est absolument convergente.

2) En déduire que la convergence de la série $\sum_{n \geqslant 1} \varphi(n)$ est équivalente à la convergence de l'intégrale $\int_1^{+\infty} \varphi(t)\ dt$.

3) Expliquer pourquoi cela permet de retrouver le cas d'une fonction décroissante positive (cours).

4) Traiter le cas de $\sum_{n \geqslant 1} \frac{\sin\left(\sqrt{n}\right)}{n}$.

Exercice 6.6

Soit $\theta(x) = \frac{1}{x^2} \exp\left(\frac{1}{x}\right)$ où $x \in \mathbb{R}^{+*}$.

1) Montrer que $\int_1^{+\infty} \theta(t)\ dt$ converge et calculer sa valeur.

2) Pour $n, k \in \mathbb{N}$ avec $k \geqslant n \geqslant 2$, montrer que

$$\int_{k/n}^{(k+1)/n} \theta(t)\ dt \leqslant \frac{1}{n}\theta\left(\frac{k}{n}\right) \leqslant \int_{(k-1)/n}^{k/n} \theta(t)\ dt$$

3) En déduire

$$\lim_{n \to +\infty} n \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \exp\left(\frac{k}{n}\right).$$