Licence Mathématiques

Exercices Espaces Vectoriels Normés et Topologie

TD LM2
Pascal Lefèvre

Il est important que chercher les exercices à l'avance pour profiter réellement des TD.
Par ailleurs, une banque de sujets d'examen est disponible sur mon site personnel
http://lefevre.perso.math.cnrs.fr/

1 Décrassage: suites numériques.

Exercice 1.1

Soient deux suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $[0,1]$ telles que le produit a_nb_n converge vers 1. Montrer que chacune des suites converge vers 1. *Indication : on pourra raisonner en termes de sous-suites ou trouver un argument très élémentaire (niveau première).*

Exercice 1.2

1) Soit $\theta\in\mathbb{R}$. Montrer que la suite $\left(\mathrm{e}^{in\theta}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge si et seulement si $\theta\equiv 0\,[2\pi]$.

2) Soit $\alpha\in\mathbb{R}^*$. On veut montrer que la suite $\left(u_n\right)_{n\geqslant 1}$ diverge où $u_n=n^{i\alpha}=\mathrm{e}^{i\alpha\ln(n)}$.
On suppose le contraire.

a) De quelle forme est nécessairement α en considérant la sous-suite $\left(u_{2^m}\right)_{m\in\mathbb{N}}$?

b) Même question avec la sous-suite $\left(u_{3^m}\right)_{m\in\mathbb{N}}$.

c) Conclure.

Exercice 1.3

Théorème de Cesàro.
Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de complexes. On lui associe la suite suivante définie pour tout $n\in\mathbb{N}$ par

$$\gamma_n=\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}a_k.$$

1) On suppose que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente vers ℓ. Montrer que $(\gamma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge aussi vers ℓ.

2) Donner un exemple où la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge et la suite $(\gamma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

3) On suppose que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$. Montrer que $(\gamma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge aussi vers $+\infty$.

4) On suppose que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.
Montrer que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge si et seulement si la suite $(\gamma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

5) *(généralisation: Cesàro à poids)*
Soit $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels strictement positifs. A toute suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de complexes, on associe

$$\tilde{a}_n=\frac{\sum_{k=0}^{n}\alpha_ka_k}{\sum_{k=0}^{n}\alpha_k}.$$

Montrer l'équivalence entre les deux assertions suivantes :

(i) La série $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\alpha_k$ diverge.

(ii) Pour toute $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergente vers a, la suite $(\tilde{a}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ associée converge aussi vers a.

Exercice 1.4

Soit $z_0\in\mathbb{C}$. On définit la suite $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par la relation de récurrence: $\quad z_{n+1}=\dfrac{z_n+|z_n|}{2}$.

1) On suppose que $z_0\in\mathbb{R}$: que se passe-t-il ?

2) Dans la suite $z_0\notin\mathbb{R}$ et on écrit $z_0=\rho_0\mathrm{e}^{i\theta_0}$ où $\rho_0>0$ et $\theta_0\in]-\pi,0[\cup]0,\pi[$.

(i) Expliciter les relations de récurrence pour les module et argument de z_n.

(ii) Conclure sur la convergence et déterminer la limite de $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 1.5

Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite bornée de réels.

1) Montrer que les suites $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(i_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suivantes sont bien définies :

$$s_n = \sup_{k\geqslant n} x_k \qquad\qquad i_n = \inf_{k\geqslant n} x_k.$$

2) Montrer que ces deux suites sont convergentes. On note $\overline{\lim}\, x_n$ la limite de $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $\underline{\lim}\, x_n$ la limite de $(i_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

3) Montrer que $\overline{\lim}\, x_n$ est la plus grande valeur d'adhérence de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et que $\underline{\lim}\, x_n$ est la plus petite valeur d'adhérence de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

4) Etablir le théorème de Bolzano-Weierstrass pour les suites réelles.

5) Montrer que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge si et seulement si $\underline{\lim}\, x_n = \overline{\lim}\, x_n$.

Exercice 1.6

1) Soient $a < b$ deux réels.

On veut montrer qu'il existe $k \in \mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{N}$ tels que $\ln(n) + 2k\pi \in [a, b]$.

a) Justifier qu'il existe un entier $n_0 \geqslant 1$ tel que: $\forall n \geqslant n_0,\ \ln(n+1) - \ln(n) < b - a$.

b) Conclure en choisissant $k \in \mathbb{Z}$ tel que $\ln\left(n_0\right) + 2k\pi < a$.

2) Pour $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 1$, on pose : $u_n = \sin(\ln(n))$.

(i) Montrer que cette suite est dense dans $[-1, 1]$.

(ii) Est-ce que cette suite converge ?

Exercice 1.7

Sous-groupes additifs de $\mathbb{R}$. On étudie les sous-groupes de $(\mathbb{R}, +)$. Soit H un sous-groupe additif de $\mathbb{R}$ non réduit à 0, *c'est à dire*: H contient 0 (mais pas seulement) et pour tous $x, y \in H$, on a encore $x - y \in H$.

On pose $\alpha = \inf\{x \in H|\ x > 0\}$. Justifier l'existence de α.

1) On veut montrer que si $\alpha > 0$, $H = \alpha\mathbb{Z}$.

i) En utilisant la caractérisation de la borne inférieure, montrer que $\alpha \in H$. En déduire $\alpha\mathbb{Z} \subset H$.

ii) Soit $h \in H \cap \mathbb{R}^{+*}$. Considérer $k = \max\{n \in \mathbb{N}|\, n\alpha \leqslant h\}$ et montrer que $h = \alpha k$. Conclure.

2) Montrer que si $\alpha = 0$, H est dense dans $\mathbb{R}$.

3) Soient $a, b \in \mathbb{R}^{*+}$, montrer que $a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z}$ est dense dans $\mathbb{R}$ ssi $\dfrac{a}{b} \notin \mathbb{Q}$.

4) Montrer que $\cos(\mathbb{Z})$ est dense dans $[-1, 1]$.

5) Soient $a, b \in \mathbb{R}^{*+}$, montrer que $a\mathbb{N} + b\mathbb{Z}$ est dense dans $\mathbb{R}$ si $\dfrac{a}{b} \notin \mathbb{Q}$ et que $\sin(\mathbb{N})$ est dense dans $[-1, 1]$.

2 Normes - Convergence de suites dans un E.V.N.

Exercice 2.1

Soit $\left(E, \|.\|\right)$ un ($\mathbb{K}-$)espace vectoriel normé. Justifier que si deux suites $\left(x_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ et $\left(x'_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers ℓ et ℓ', alors pour tous $\lambda, \lambda' \in \mathbb{K}$, la suite $\left(\lambda x_n + \lambda' x'_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\lambda\ell + \lambda'\ell'$.

Exercice 2.2

Montrer que les boules ouvertes et fermées dans un espace vectoriel normé sont convexes.

Exercice 2.3

Justifier que les exemples du cours sont bien des normes.

Exercice 2.4

Soit $\left(E, \|.\|\right)$ un ($\mathbb{K}-$) espace vectoriel normé non trivial (non réduit à $\{0\}$. Montrer que pour tout $a \in E$ et tout $r \geqslant 0$, la sphère $S(a, r)$ est non vide.

Exercice 2.5

Soit P un polynôme (non nul!). On considère $N : C([0,1]) \longrightarrow \mathbb{R}^+$ l'application définie par $N(f) = \sup\limits_{t\in[0,1]} |P(t).f(t)|$ pour $f \in C([0,1])$.

Justifier que N est une norme sur $C([0,1])$.

Exercice 2.6

Justifier les résultats sur le produit dans le cours.

Exercice 2.7

On se place dans $\mathcal{M}_d(\mathbb{C})$ l'espace des matrices carrées d'ordre d à coefficients complexes.

1) Soient $\left(A_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite $\mathcal{M}_d(\mathbb{C})$ et $A \in \mathcal{M}_d(\mathbb{C})$.

Montrer que $\left(A_n\right)_n$ converge vers une matrice A si et seulement si pour tout i, j $(1 \leqslant i, j \leqslant d)$ le terme (i, j) de A_n converge vers le terme (i, j) de A.

2) Soient $\left(A_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ et $\left(B_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites $\mathcal{M}_d(\mathbb{C})$ convergentes resp. vers A et B dans $\mathcal{M}_d(\mathbb{C})$.

Montrer que $\left(A_nB_n\right)_n$ converge vers AB.

Exercice 2.8

Soit $A \in \mathcal{M}_d(\mathbb{C})$. On suppose que la suite $\left(A^n\right)_n$ converge vers une matrice P. Montrer que P est une matrice de projection.

Exercice 2.9

Soit $A \in \mathcal{M}_d(\mathbb{C})$, antisymétrique. On suppose que la suite $\left(A^n\right)_n$ converge vers une matrice L. Que peut-on dire de L?

Exercice 2.10

Soit $A \in \mathcal{M}_d(\mathbb{C})$. On note $A_n = I + A + \cdots + A^n = \sum_{k=0}^{n} A^k$ pour $n \geqslant 1$.

1) On suppose que la suite $\big(A_n\big)_{n\geqslant 1}$ converge vers une matrice B. Montrer que $I - A$ est inversible et que $B = (I - A)^{-1}$.

2) Montrer que la réciproque est fausse: trouver un exemple où $\big(A_n\big)_{n\geqslant 1}$ diverge et $I - A$ inversible. *Indication: chercher un exemple dans un cadre très très simple...*

Exercice 2.11

(à nouveau Cesàro)

Soient $(E, \|.\|)$ un ($\mathbb{K}-$)espace vectoriel normé et $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de E. On lui associe la suite suivante définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par

$$\gamma_n = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} x_k.$$

On suppose que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente vers $\ell \in E$. Montrer que $(\gamma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge aussi vers ℓ.

Exercice 2.12

On considère

$$\begin{array}{ccc} C([0,1]) & \longrightarrow & \mathbb{R}^+ \\ f & \longmapsto & \|f\|_1 = \displaystyle\int_0^1 |f(t)|\, dt \end{array}$$

1) Justifier que c'est une norme sur $C([0,1])$.

2) Calculer $\|X^n\|_1$ où $n \in \mathbb{N}$. Est-ce que $\big(X^n\big)_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans $\big(C([0,1]), \|.\|_1\big)$?

3) Justifier que $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_\infty$ ne sont pas équivalentes sur $C([0,1])$.

4) Est-ce que ce résultat remet en cause le théorème du cours ? (lequel d'ailleurs?)

5) On veut montrer que $\big((n+1)X^n\big)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge dans $\big(C([0,1]), \|.\|_1\big)$.

a) On suppose que cette suite converge vers f.

(i) Pour tout $a \in [0,1[$, justifier que

$$\int_0^a |f(t)|\, dt - a^{n+1} \leqslant \int_0^1 |f(t) - (n+1)t^n|\, dt$$

(ii) En déduire que $f = 0$.

b) Conclure.

Exercice 2.13

Sur $E = C^1([0,1])$, on considère $\|f\| = \sup_{t\in[0,1]} |f'(t)|$ pour $f \in E$.

Montrer que ce n'est pas une norme: quelle propriété est mise en défaut ? Est-ce que toutes les autres sont respectées ?

Exercice 2.14

On considère
$$\begin{array}{rcl} \mathbb{R}[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}^+ \\ P & \longmapsto & \sup\limits_{0\leqslant j\leqslant d} |a_j| \qquad \text{où } P \text{ s'écrit } P(X) = \sum\limits_{j=0}^{d} a_j X^j \end{array}$$

et
$$\begin{array}{rcl} \mathbb{R}[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}^+ \\ P & \longmapsto & \sum\limits_{j=0}^{d} |a_j| \qquad \text{où } P \text{ s'écrit } P(X) = \sum\limits_{j=0}^{d} a_j X^j \end{array}$$

1) Justifier que ce sont des normes sur $\mathbb{R}[X]$.

2) Sont-elles équivalentes ?

3) Commenter...

Exercice 2.15

Soit $d \geqslant 1$. On considère
$$\begin{array}{rcl} \mathbb{R}_d[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}^+ \\ P & \longmapsto & \sup\limits_{0\leqslant j\leqslant d} |a_j| \qquad \text{où } P \text{ s'écrit } P(X) = \sum\limits_{j=0}^{d} a_j X^j \end{array}$$

1) Justifier qu'il s'agit d'une norme sur $\mathbb{R}_d[X]$.

2) Montrer qu'il existe une constante C_d telle que

$$\text{Pour tout polynôme } P \in \mathbb{R}_d[X] \text{ s'écrivant } P(X) = \sum_{j=0}^{d} a_j X^j \text{ , on a } \sup_{0\leqslant j\leqslant d} |a_j| \leqslant C_d \sup_{t\in[0,1]} |P(t)|$$

Exercice 2.16

Soit $p \geqslant 1$. On appelle $\ell^p = \left\{(a_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}};\ \sum |a_n|^p < +\infty\right\}$ et $\|(a_n)\|_p = \left(\sum\limits_{n\geqslant 0} |a_n|^p\right)^{\frac{1}{p}}$ est alors défini sur ℓ^p.

On veut montrer que ℓ^p est un E.V.N.

1) Commencer par montrer toutes les propriétés sauf l'inégalité triangulaire.

2) Pour l'inégalité triangulaire pour la norme $\|.\|_p$: considérons $a, b \in \ell^p$ non nuls. En vous inspirant de la preuve faite en cours pour la norme euclidienne, en considérant $\lambda = \dfrac{\|a\|_p}{\|a\|_p + \|b\|_p}$, $\tilde{a} = \frac{1}{\|a\|_p} a$ et $\tilde{b} = \frac{1}{\|b\|_p} b$, montrer que $\|.\|_p$ vérifie effectivement la propriété de l'inégalité triangulaire.

Exercice 2.17

(Oral E.N.S.cachan MP) Soit A une partie de $\mathbb{R}^n$, non vide. Comme d'habitude d_A est la fonction distance à A: $d_A(x) = (x, A)$ pour $x \in \mathbb{R}^n$.

1) Rappeler pourquoi d_A est continue.

Soient A et B deux parties non vides de $\mathbb{R}^n$.

2) Donner une condition équivalente à $d_A = d_B$.

3) On note $\rho(A, B) = \sup\{|d_A(y) - d_B(y)|\ ; y \in \mathbb{R}^n\} \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$.

Montrer que $\rho(A, B) = \max\left\{\sup\limits_{x\in B} d_A(x); \sup\limits_{y\in A} d_B(y)\right\}$.

3 Continuité et Convergence.

Exercice 3.1

Montrer qu'une application lipschitzienne est uniformément continue et donc continue.

Exercice 3.2

1) Soit $f(x) = x\sin(\ln(x))$ pour $x > 0$ et $f(0) = 0$.
   a) Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^+$.
   b) Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$ et que cette dérivée est bornée.
   c) Est-ce que f est uniformément continue sur $\mathbb{R}^+$?
2) Soit $g(x) = x\sin(x)$ pour $x \in \mathbb{R}$. Montrer que g n'est pas uniformément continue.

Exercice 3.3

Soit f l'application $[0,1[$ dans le cercle unité du plan complexe qui à $t \in [0,1[$ associe $e^{2i\pi t}$.
(i) Montrer que f est une bijection continue.
(ii) f est-elle un homéomorphisme ?

Exercice 3.4

Pour $f \in C([0,1])$, on définit les normes $\|f\|_\infty = \sup_{t\in[0,1]} |f(t)|$ et $\|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)|dt$. Les applications linéaires suivantes sont-elles continues ? On calculera éventuellement leur norme.

$$\begin{array}{rccl} \Phi : & (C([0,1]), \|.\|_\infty) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & h & \longmapsto & h(0) \end{array}$$

$$\begin{array}{rccl} \Phi : & (C([0,1]), \|.\|_1) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & h & \longmapsto & h(0) \end{array}$$

$$\begin{array}{rccl} \Phi : & (C([0,1]), \|.\|_1) & \longrightarrow & (C([0,1]), \|.\|_\infty) \\ & h & \longmapsto & h \end{array}$$

$$\begin{array}{rccl} \Phi : & (C([0,1]), \|.\|_1) & \longrightarrow & (C([0,1]), \|.\|_\infty) \\ & h & \longmapsto & \left(x \mapsto \int_0^x h(t)dt\right) \end{array}$$

$$\begin{array}{rccl} \Phi : & (C([0,1]), \|.\|_1) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & h & \longmapsto & \int_0^{\frac{1}{2}} h(t)dt - \int_{\frac{1}{2}}^1 h(t)dt \end{array}$$

Quel est le problème avec $\begin{array}{rccl} \Phi : & (C([0,1]), \|.\|_\infty) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & h & \longmapsto & h^2(0) \end{array}$?

Exercice 3.5

Soit σ l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $\sigma(x) = 1$ si $x \geqslant 0$ et $\sigma(x) = -1$ sinon. Soit f l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = \sigma(x)\sqrt{|x|}$ pour tout réel x.

Montrer que f est un homéomorphisme vérifiant pour tous $x, y \in \mathbb{R}$, $|f(x) - f(y)| \leqslant 2\sqrt{|x-y|}$ et $|f^{-1}(x) - f^{-1}(y)| \leqslant |x-y|(|x|+|y|)$. Est-ce que f et f^{-1} sont uniformément continues ?

Exercice 3.6

Soient $E = \mathbb{K}^n$

1) Justifier que l'application $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \mapsto Tr(A) \in \mathbb{K}$ est continue (pourquoi n'a t on précisé aucune norme en jeu ?)

2) Quelle est la nature topologique (ouvert, fermé ?) de l'ensemble des matrices de trace nulle?

Exercice 3.7

Soient $E = \mathbb{K}^n$, $\beta = \{\mathrm{e}_1, \ldots, \mathrm{e}_n\}$ la base canonique de $\mathbb{K}^n$ et $\beta^* = \{\mathrm{e}_1^*, \ldots, \mathrm{e}_n^*\}$ sa base duale: on rappelle donc que $\mathrm{e}_k^*(x)$ est la k^{ieme} coordonnée de x dans la base β.

1) Soit $A = \left(a_{i,j}\right)_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Rappeler comment exprimer $a_{i,j}$ en fonction des éléments de β et β^*.

2) Justifier que pour tout $i, j \in \{1, \ldots, n\}$, l'application $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \mapsto a_{i,j} \in \mathbb{K}$ est continue (pourquoi n'a t on précisé aucune norme en jeu ?)

3) Montrer que $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \mapsto det(A) \in \mathbb{K}$ est continue.

4) Justifier que $GL_n(\mathbb{K})$ est un ouvert de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

5) En se référant au cours de réduction d'endomorphisme, montrer que $GL_n(\mathbb{K})$ est dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Indication: on pourra remarquer que "très souvent" $A - \lambda I_n$ est inversible.

Exercice 3.8

On note c_0 l'espace vectoriel des suites réelles convergentes vers 0, et c_{00} l'espace vectoriel des suites réelles dont les termes sont nuls à partir d'un certain rang.

1) Justifier que $\|a\|_\infty = \sup_{n \in \mathbb{N}} |a_n|$ définit bien une norme sur c_0.

2) Montrer que c_{00} est dense dans c_0.

Exercice 3.9

Soient $(X, \|.\|)$ et $(Y, \|.\|')$ deux espaces vectoriels normés. Soient f et g continues de X dans Y.

(i) Montrer que $\{x \in X |\, f(x) = g(x)\}$ est fermé dans X.

(ii) Soit A une partie dense de X. Montrer que si f et g coïncident sur A alors $f = g$.

Exercice 3.10

Soit $(E, \|.\|)$ un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé et $f \in E^* = \mathcal{L}(E, \mathbb{R})$.

1) On suppose que f est continue. Quelle est la nature topologique de $\mathrm{Ker}\,(f)$? (justifier)

2) On suppose que le noyau de f est fermé et que f n'est pas continue. En particulier f n'est pas identiquement nulle donc il existe $c \in E$ tel que $f(c) = 1$.

a) Montrer qu'il existe une suite $(a_n)_{n\geqslant 1}$ dans E vérifiant, pour tout $n \geqslant 1$, $\|a_n\| = 1$ et $f(a_n) \geqslant n$.

b) Pour $n \geqslant 1$, on considère $u_n = c - \dfrac{1}{f(a_n)} a_n$.

(i) Que vaut $f\big(u_n\big)$? Est-ce que $\big(u_n\big)_{n\geqslant 1}$ converge ? (vers quoi éventuellement)

(ii) Conclure.

Exercice 3.11

Soient $\mathbb{D}$ le disque unité fermé de $\mathbb{R}^2$ (i.e. la boule unité fermée pour la norme euclidienne) et K le carré unité fermé : $K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 |\ \max(|x|, |y|) \leqslant 1\}$. Ils sont munis de la topologie induite par la structure euclidienne de $\mathbb{R}^2$. Montrer que $\mathbb{D}$ et K sont homéomorphes.

Pour cela, on pourra considérer l'application de $\mathbb{D}$ dans K définie par

$$f(0) = 0 \qquad \text{et} \qquad f(x, y) = \left(\frac{x\sqrt{x^2 + y^2}}{\max(|x|, |y|)}, \frac{y\sqrt{x^2 + y^2}}{\max(|x|, |y|)}\right) \qquad \text{pour } (x, y) \in \mathbb{D}\backslash\{0\}.$$

Exercice 3.12

Soient (f_n) une suite d'applications uniformément continues de (X, d) dans (Y, δ) (deux espaces métriques), convergeant uniformément vers f sur X. Montrer que f est uniformément continue.

Exercice 3.13

On note c_0 l'espace vectoriel des suites réelles convergentes vers 0.

1) Justifier que $\|a\|_\infty = \sup_{n\in\mathbb{N}} \big|a_n\big|$ définit bien une norme sur c_0.

2) Montrer que l'application suivante est continue (on calculera la norme; montrer qu'elle n'est pas atteinte sur la boule unité)

$$\begin{array}{rccl} \varphi : & c_0 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & u & \longmapsto & \displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{u_n}{2^{n+1}} \end{array}$$

On remarquera que c'est une application linéaire

Exercice 3.14

Hahn-Banach fini-dimensionnel. Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension $n \geqslant 1$. Soient F un sous-espace de E et f une forme linéaire continue sur F. Montrer que f se prolonge en une forme linéaire $\tilde{f}$ sur E avec $\left|\!\left|\!\left|\tilde{f}\right|\!\right|\!\right| = |||f|||$.

Indication : on raisonnera par récurrence sur la dimension. On considère alors f une forme linéaire continue sur F, de dimension finie et $a \notin F$. On prouvera l'existence de $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que pour tous $x, y \in F$, on ait $f(x) - \|f\|.\|x - a\| \leqslant \alpha \leqslant \|f\|.\|y + a\| - f(y)$ pour conclure avec $E = F \bigoplus \mathbb{R}a$.

Exercice 3.15

Produire des formes linéaires non continues en dimension infinie...

Soit $(E, \|.\|)$ un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé de dimension infinie. On peut considérer une base (algébrique) $(\beta_j)_{j\in J}$ où J est infini. On note $(\beta_j^*)_{j\in J}$ les formes linéaires coordonnées associées habituelles.

1) Justifier qu'il existe une famille de réels $(m_j)_{j\in J}$ tels que $\sup\limits_{j\in J} m_j = +\infty$.

2) On considère, pour $x \in E$:

$$\theta(x) = \sum_{j\in J} m_j \|\beta_j\| \beta_j^*(x) \ .$$

Justifier que cette somme est en fait une somme finie à x fixé, et que l'on définit ainsi une forme linéaire.

3) Montrer que θ n'est pas continue.

Exercice 3.16

Un exemple de suites avec deux limites différentes...

1) On se place dans le cas particulier $\mathbb{R}[X]$, muni de la norme $\|P\|_1 = \displaystyle\int_0^1 |P(t)|dt$.

a) Justifier que $N(P) = \displaystyle\int_0^1 |P(t) + P(1)|dt$ définit une norme sur $\mathbb{R}[X]$.

a) Montrer que la suite $\big(X^n\big)_{n\geqslant 1}$ converge vers 0 dans $\big(\mathbb{R}[X], \|\cdot\|_1\big)$, mais converge vers le polynôme constant $\frac{1}{2}$ dans $\big(\mathbb{R}[X], N\big)$.

2) Peut-on faire ce type de construction dans un espace de dimension finie ? Pourquoi ?

3) Construction générale en dimension infinie.

Soit $(E, \|.\|)$ un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé de dimension infinie. On sait que l'on peut produire une forme linéaire non continue θ (cf exo 3.15).

a) Justifier qu'il existe $\mathrm{e}_0 \in E$ tel $\theta(e_0) = 1$ et qu'il existe une suite $\big(u_n\big)_{n\geqslant 1}$ dans la sphère unité de E vérifiant $|\theta(u_n)| \longrightarrow +\infty$, avec $\theta(u_n) \neq 0$ pour tout $n \geqslant 1$.

On considère, pour $x \in E$:

$$N(x) = \big\|x + \theta(x)\mathrm{e}_0\big\| \ .$$

b) Justifier que l'on définit ainsi une norme sur E.

c) On définit $x_n = \dfrac{1}{\theta(u_n)} u_n \in E$.

(i) Justifier que $\big(x_n\big)_{n\geqslant 1}$ converge vers 0 dans $(E, \|.\|)$.

(ii) Justifier que $\big(x_n\big)_{n\geqslant 1}$ converge dans (E, N) et préciser la limite.

(iii) Commenter...

4 Vocabulaire topologique.

Exercice 4.1

Soit E un espace vectoriel normé. On considère $A \subset E$.

1) Comparer $\mathring{\mathring{A}}$ et $\mathring{A}$.

2) Comparer $\overline{\overline{A}}$ et $\overline{A}$.

Exercice 4.2

Déterminer si les parties suivantes A sont ouvertes, fermées ou ni l'un ni l'autre:

1) On se place dans $\mathbb{R}$ (avec la valeur absolue)

(i) $A = [0,1[\cup[2,3]$ (ii) $A = [0,1] \cup [2,3]$ (iii) $A = [0,1[\cup]1,2]$

(iv) $\mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$ (v) $A = \mathbb{Q}$ (vi) $A = \{0\} \cup \{1/2^n \mid n \in \mathbb{N}\}$

2) On se place dans $\mathbb{C}$ (avec le module)

(i) $A = [0,1]$ (ii) $A =]0,1[$

(iii) $A = \mathring{D}(0,1) \backslash \{0\} = \{z \in \mathbb{C} \mid 0 < |z| < 1\}$ (iv) $A = \mathring{D}(0,1) \backslash \mathring{D}(0,1/2)$

Exercice 4.3

On considère dans $\mathbb{R}$, la partie $A = [0,1[\cup\{2\}$. Déterminer $\overline{A}$, $\mathring{A}$, $\overset{\circ}{\overline{A}}$ et $\overline{\mathring{A}}$

Exercice 4.4

Soit E un espace vectoriel normé. On considère $A, B \subset E$.

1) Montrer que $\mathring{A} \cup \mathring{B} \subset \overset{\circ}{\widehat{A \cup B}}$ mais que l'on n'a pas égalité en général (en considérant par exemple les rationnels et les irrationnels dans $\mathbb{R}$).

2) Montrer que $\mathring{A} \cap \mathring{B} = \overset{\circ}{\widehat{A \cap B}}$.

3) En déduire les énoncés correspondants pour l'adhérence.

Exercice 4.5

Déterminer les adhérences et les intérieurs des parties A suivantes de $\mathbb{R}^n$ (muni de la distance euclidienne *par exemple (!)*).

(i) $(n = 1)$ $A = [a,b]$. (ii) $(n = 1)$ $A = [a, +\infty[$.

(iii) $(n = 2)$ $A = [a,b] \times \{0\}$ (iv) $(n = 2)$ $A = \{(x,y) | \, x^2 + y^2 = 1\}$

(v) $(n = 1)$ $A = \mathbb{Q} \cap]0,1[$. (vi) $(n = 2)$ $A = \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$

(vii) $(n = 2)$ $A = \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}^c$ (viii) $(n = 1)$ $A = \{1/n | \, n \in \mathbb{N}^*\}$.

(ix) $(n = 1)$ $A = \{\sin(1/n) | \, n \in \mathbb{N}^*\}$. (x) $(n = 1)$ $A = \{\cos(n) | \, n \in \mathbb{N}^*\}$.

(xi) $(n = 4)$ $A = \{(a,b,c,d) | \, ad - bc \neq 0\}$.

(xii) l'ensemble des matrices orthogonales d'ordre 2.

(xiii) l'ensemble des matrices orthogonales d'ordre n.

Exercice 4.6

On se place dans $\mathbb{R}^2$.

a) Quelle est l'adhérence de $\left\{(x, \frac{1}{x}) \mid x > 0\right\}$?

b) Quelle est l'adhérence de $\left\{(x, \sin(1/x)) \mid x \in]0, 2/\pi]\right\}$?

On pourra faire un dessin pour comprendre ce qu'il se passe...

Exercice 4.7

Soient $(E, \|.\|)$ un espace vectoriel normé et F un sous-espace vectoriel, distinct de E. Montrer que F est d'intérieur vide.

Exercice 4.8

Soient $(E, \|.\|)$ un espace vectoriel normé etA, B deux parties de E.

On rappelle que $A + B = \{a + b \mid a \in A, b \in B\}$.

1) On suppose que A est ouvert. Montrer que $A + B$ ouvert.

2) Donner des exemples de fermés A, B de $\mathbb{R}$ tels que $A + B$ pas fermé:

(i) en considérant $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy = 1\}$ et $B = \{(x, 0) \mid x \in \mathbb{R}\}$.

(ii) en utilisant les résultats sur les sous-groupes additifs de $\mathbb{R}$.

Exercice 4.9

Soient $(E, \|.\|)$ et $(F, \|.\|')$ deux espaces vectoriels normés et $f : E \to F$ une application continue.

Montrer que le graphe de cette application, c'est à dire $\{(x, f(x)) \mid x \in E\}$, est un fermé de $E \times F$ (avec norme produit).

Exercice 4.10

Soient $(E, \|.\|)$ un espace vectoriel normé et F un sous-espace vectoriel de E. Montrer que $\overline{F}$ est encore un sous-espace vectoriel de E.

Exercice 4.11

Soit $(E, \|.\|)$ un espace vectoriel normé. On considère l'application $f : v \in E \mapsto \frac{1}{1+\|v\|^2} v \in E$.

Justifier que f est continue et montrer que son image est $\overline{B}(0, 1/2)$.

Exercice 4.12

On dit qu'un espace vectoriel normé est séparable si il admet une partie dénombrable dense.

1) Montrer que c_0 (cf. exercice 3.7) est séparable.

2) On veut montrer que ℓ^∞, l'espace des suites bornées, muni de la même norme n'est pas séparable. On suppose qu'il existe une partie dénombrable dense $(v_n)_{n \geqslant 1}$. Soit x une suite à valeurs 0 ou 1. On note $\omega_x = \overset{\circ}{B}(x, \frac{1}{2})$.

a) Montrer que $x \neq x' \Rightarrow \omega_x \cap \omega_{x'} = \varnothing$.

b) Montrer que pour tout $x \in \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$, il existe un entier $n(x)$ tel que $v_{n(x)} \in \omega_x$. Justifier que pour $x \neq x'$, on a $n(x) \neq n(x')$.

c) En déduire que $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ devrait alors être dénombrable et conclure (on pourra faire un raisonnement via la diagonale de Cantor).

5 Compacité.

Exercice 5.1

On se place dans $\mathbb{R}^2$. Déterminer si les parties suivantes sont compactes:

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^4 = 1\} \qquad B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + xy + y^2 \leqslant 1\}$$
$$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y^2 = x(1 - 2x)\} \qquad D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y^2 + x(1 - 2x) = 0\}$$

Exercice 5.2

Soient un espace vectoriel normé $(E, \|.\|)$ et $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite dont les trois suites extraites $(a_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$, $(a_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(a_{3n})_{n\in\mathbb{N}}$ convergent. Démontrer que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

Exercice 5.3

Soit K une partie compacte d'un espace vectoriel normé $(E, \|.\|)$. On considère une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de K.

On suppose que $\ell \in E$ et cette suite ont la propriété suivante: à chaque fois qu'une sous-suite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, elle a pour limite ℓ. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ.

Exercice 5.4

Soit $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ continue telle que $\displaystyle\lim_{\|x\|\to+\infty} f(x) = +\infty$ (où $\|\cdot\|$ est une norme sur $\mathbb{R}^d$). Montrer que f admet un minimum.

Exercice 5.5

Soit E l'espace des fonctions continues sur $[0, 1]$, muni de la norme $\|.\|_\infty$.

Pour $n \in \mathbb{N}$, soit $f_n(t) = \mathrm{e}^{2i\pi nt}$, où $t \in [0, 1]$.

1) Pour $n, p \in \mathbb{N}$ avec $n \neq p$, calculer $\displaystyle\int_0^1 |f_n(t) - f_p(t)|^2 \, dt$.

2) En déduire que pour $n, p \in \mathbb{N}$ avec $n \neq p$, on a $\|f_n - f_p\|_\infty \geqslant \sqrt{2}$.

3) Est-ce que f_n est dans la boule unité fermée de E ?

4) En déduire que la boule unité fermée de E n'est pas compacte.

Exercice 5.6

Soient $(E_1, \|.\|_1)$ et $(E_2, \|.\|_2)$ deux espaces vectoriels normés, K_1 une partie compacte de E_1 et K_2 une partie compacte de E_2.

Montrer que $K_1 \times K_2$ est une partie compacte de $E_1 \times E_2$.

Exercice 5.7

Soient $(E, \|.\|)$ un espace vectoriel normé et K une partie compacte de E.

1) On suppose que L est une partie compacte de E. Montrer que $K + L$ est compact.

2) On suppose que F est une partie fermée de E. Montrer que $K + F$ est fermé.

Exercice 5.8

Soient $(E, \|.\|)$ un espace vectoriel normé, K une partie compacte de E et F une partie fermée de E. On suppose que K et F sont disjoints. Montrer que $d(K, F) > 0$.

Exercice 5.9

Soient E et F deux espaces vectoriels normés.

Soit $f|E \to F$ bijective. On suppose que l'image d'un ouvert est toujours un ouvert. Montrer que pour toute partie compacte K de F, $f^{-1}(K)$ est une partie compacte de E.

Exercice 5.10

Soient $(E, \|.\|)$ un espace vectoriel normé et K une partie compacte de E. On suppose que l'application $f : K \to K$ une application continue telle que pour tous $x, y \in K$,

$$\|f(x) - f(y)\| \geqslant \|x - y\|.$$

On veut montrer que f est une isométrie bijective.

1) Justifier que f est injective.

2) Pour montrer que f est surjective, l'idée est de considérer les images itérées d'un point. Soit $y \in K$. On considère $u_n = f^n(y)$ où $f^n = f \circ \cdots \circ f$ (n fois), et $f^0 = Id$.

(i) Montrer que pour tous $n > p$, on a $\|u_n - u_p\| \geqslant \|u_{n-p} - y\|$.

(ii) Justifier qu'il existe une suite d'entiers strictement croissante (n_j) telle que

$$\|u_{n_{j+1}-n_j} - y\| \longrightarrow 0\ .$$

(iii) En déduire que $y \in \overline{f(K)}$.

(iv) Conclure.

3) Conclure. *Indication: utiliser la démarche suivie dans 2, en partant cette fois de deux éléments y et y'.*

Exercice 5.11

Montrer que le groupe orthogonal $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ est compact.

Exercice 5.12

Théorème de Riesz.

Soit $(E, \|.\|)$ un espace vectoriel normé. On suppose que la boule unité fermée B_E de E est compacte. Le but est de montrer que E est nécessairement de dimension finie.

On suppose que E est de dimension infinie.

1) Justifier qu'il existe un vecteur $\mathrm{e}_1 \in E$ de norme 1.

On suppose avoir construit $\mathrm{e}_1, \ldots, \mathrm{e}_n \in B_E$ vérifiant $\|\mathrm{e}_i - \mathrm{e}_j\| \geqslant 1$ pour $i \neq j$. On considère $F = vect\{\mathrm{e}_1, \ldots, \mathrm{e}_n\}$.

2) Justifier qu'il existe $a \in E$ et $y \in F$ tels que $\|a - y\| = d(a, F) > 0$.

3) Montrer que le vecteur $\mathrm{e}_{n+1} = \dfrac{1}{\|a - y\|}(a - y)$ vérifie $\|\mathrm{e}_{n+1} - z\| \geqslant 1$ pour $z \in F$.

4) Conclure.

Exercice 5.13

Soit $(E, \|.\|)$ un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé de dimension finie. $\mathcal{L}(E)$ est muni de la norme opérateur usuelle $|||f||| = \sup\limits_{\|x\|=1} \|f(x)\|$.

Montrer que si p est un projecteur non nul, on a $|||p||| \geqslant 1$. Montrer que l'ensemble des projecteurs ayant une image donnée est un convexe fermé de $\mathcal{L}(E)$.

Exercice 5.14

Soit K une partie non vide de $\mathbb{R}^n$, convexe, compacte, symétrique par rapport à 0 telle que 0 soit un point intérieur de K. On veut montrer qu'il existe une norme p sur $\mathbb{R}^n$ telle que K soit la boule unité de $\mathbb{R}^n$ pour p.

On introduit la jauge de Lorentz-Minkowski : $p(x) = \inf\{t > 0 | \frac{x}{t} \in K\}$. Montrer que p est une norme qui répond au problème. Pour cela,

i) Montrer que $p(x) = 0$ ssi $x = 0$.

ii) Pour x non nul, montrer que $p(x)^{-1}x \in K$.

iii) Pour x non nul et $t > 0$, montrer que $p(tx) \leqslant tp(x)$.

iv) Conclure.

6 Connexité

Exercice 6.1

Est-ce que $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \neq y\}$ est une partie connexe, ou connexe par arcs de $\mathbb{R}^2$? Et sinon combien de composantes connexes y a t il ?

Exercice 6.2

Soient E un espace vectoriel normé et C une partie de E.
Montrer que C est connexe si et seulement toute application continue de C dans $\mathbb{Z}$ est constante.

Exercice 6.3

Soit $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{C}$ une application continue.
1) On suppose que pour tout $x \in [a, b]$, on a $(f(x))^2 = 1$. Montrer que f est constante.
2) On suppose que pour tout $x \in [a, b]$, on a $\exp(if(x)) = 1$. Est-ce que f est constante ?

Exercice 6.4

Soient U_1 et U_2 des parties connexes d'un espace vectoriel normé.
1) On suppose que $U_1 \cap U_2 \neq \varnothing$, montrer que $U_1 \cup U_2$ est connexe.
2) Montrer que la réunion $U_1 \cup U_2$ est connexe si et seulement si $\overline{U_1} \cap U_2 \neq \varnothing$ ou $U_1 \cap \overline{U_2} \neq \varnothing$.

Exercice 6.5

Soient E un espace vectoriel normé et C une partie connexe et non bornée de E. Montrer que C intersecte toute sphère.

Exercice 6.6

(*Lemme de passage des douanes*). Soient E un espace vectoriel normé et A une partie de E. Montrer que toute partie connexe C de E qui rencontre $\mathring{A}$ et l'extérieur de A (i.e. le complémentaire de $\overline{A}$), rencontre aussi la frontière de A.
Indication: on pourra raisonner par l'absurde et obtenir une partition de C "non autorisée".

Exercice 6.7

On veut montrer que $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}$ ne sont pas homéomorphes.
1) Montrer que pour tout $a \in \mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^2 \backslash \{a\}$ est connexe.
2) Conclure.

Exercice 6.8

Soient E un espace vectoriel normé et $\left(C_n\right)_{n \geqslant 1}$ une suite décroissante de parties connexes et compactes (non vides) de E.

On veut montrer que $C = \bigcap_{n \geqslant 1} C_n$ est une partie connexe et compacte de E.

On suppose donc que $C = F_1 \cup F_2$ avec F_1, F_2 fermés de C tels que $F_1 \cap F_2 = \varnothing$.

1) Justifier que F_1 et F_2 sont des parties compactes de E.

2) Montrer qu'il existe deux ouverts disjoints (de E) ω_1 et ω_2 tels que $F_i \subset \omega_i$ (où $i \in \{1,2\}$).

3) Montrer qu'il existe $n_0 \geqslant 1$ tel que $C_{n_0} \subset \omega_1 \cup \omega_2$.

4) Conclure.

Exercice 6.9

Montrer que $GL_n^+(\mathbb{R}) = \{M|\ \det(M) > 0\}$ est connexe par arcs. Est-ce le cas de $GL_n(\mathbb{R})$? Montrer que $GL_n(\mathbb{C})$ est connexe par arcs.

Exercice 6.10

Dans $(\mathbb{R}^2, \|.\|_2)$, montrer que E est connexe puis que son adhérence est connexe mais n'est pas connexe par arcs, où $E = \bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} \left\{(\frac{1}{n}, y)|\ y \in \mathbb{R}\right\} \cup \bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} \left\{(x,n)|\ \frac{1}{n+1} \leqslant x \leqslant \frac{1}{n}\right\}$.

Exercice 6.11

Soient E un espace vectoriel normé et K une partie compacte de E.

1) Justifier que $E\backslash K$ admet une et une seule composante connexe non bornée. On pourra d'abord montrer que pour tout $R > 0$, la partie $E\backslash \mathring{B}(0,R)$ est connexe par arc.

2) On suppose que E est de dimension infinie. On veut montrer que $E\backslash K$ est connexe.

On suppose qu'il y a au moins deux composantes connexes. D'après le 1., il existe une composante connexe non bornée et les autres sont bornées.

Soit x dans une composante connexe bornée.

a) Justifier qu'il existe $r > 0$ tel que $S(x,r)$ est incluse dans la composante connexe non bornée de $E\backslash K$.

b) On considère l'application $\Delta : u \in K \longmapsto \Delta(u) = x + \dfrac{r}{\|u-x\|}(u-x)$.

(i) Justifier que Δ est bien définie et que $\Delta(K)$ est une partie compacte de E.

(ii) Justifier que pour tout $y \in S(x,r)$, on a $K \cap [x,y] \neq \varnothing$.

(iii) En déduire que $\Delta(K) = S(x,r)$.

c) Conclure.

3) Montrer que ce n'est pas vrai en général que $E\backslash K$ est connexe lorsque E est de dimension finie.

ARCHIVES DEVOIRS MAISON

D.M. 1

Exercice 1

Soient $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé et A une partie non vide de E à la fois ouverte et fermée dans E.

Soit $a \in A$. On suppose qu'il existe $\beta \notin A$.

a) Montrer que l'application $t \in \mathbb{R} \longmapsto (1-t)a + t\beta$ est lipschitzienne.

b) Soit $U = \{t \in \mathbb{R} \,|\, (1-t)a + t\beta \in A\}$. Montrer que U est une partie ouverte et fermée de $\mathbb{R}$.

On note $K = U \cap [0,1]$.

c) Justifier qu'il existe $t_0 = \max K$.

d) Montrer qu'il existe $r > 0$ tel que $t_0 + r \in K$.

e) Conclure.

Exercice 2

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension $n \geqslant 1$.

1) Soient F un hyperplan de E et f une forme linéaire sur F. On veut montrer que f se prolonge en une forme linéaire $\widetilde{f}$ sur E avec $\left|\!\left|\!\left| \widetilde{f} \right|\!\right|\!\right| = |||f|||$.

a) Soit $a \notin F$. Prouver l'existence de $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que pour tous $x, y \in F$, on ait

$$f(x) - |||f|||.\|x-a\| \leqslant \alpha \leqslant |||f|||.\|y+a\| - f(y)$$

On pose $\widetilde{f}(x + \lambda a) = f(x) + \lambda\alpha$ pour $\lambda \in \mathbb{R}$ et $x \in F$.

b) Montrer que si $t > 0$ alors on a $\widetilde{f}(u + ta) \leqslant |||f|||.\|u + ta\|$ pour tout $u \in F$.

c) De même que si $t < 0$ alors on a $\widetilde{f}(u + ta) \leqslant |||f|||.\|u + ta\|$ pour tout $u \in F$.

d) En déduire que $\widetilde{f}(v) \leqslant |||f|||.\|v\|$ pour tout $v \in E$ puis $|\widetilde{f}(v)| \leqslant |||f|||.\|v\|$ pour tout $v \in E$.

e) Conclure.

2) Soient F un sous-espace de E et f une forme linéaire sur F. Montrer que f se prolonge en une forme linéaire $\widetilde{f}$ sur E avec $\left|\!\left|\!\left| \widetilde{f} \right|\!\right|\!\right| = |||f|||$.

D.M. 2

Soient $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé et K une partie compacte de E. On considère une application $f : K \longrightarrow K$ vérifiant:

$$\forall x, y \in K\,, \quad \text{avec } x \neq y \qquad \|f(x) - f(y)\| < \|x - y\|\,.$$

a) Justifier que l'application $x \in K \longmapsto f(x) - x \in E$ est continue.

b) Montrer que $m = \inf\limits_{x \in K} \|f(x) - x\|$ existe et qu'il existe $\alpha \in K$ tel que $m = \|f(\alpha) - \alpha\|$.

c) Montrer que $f(\alpha) = \alpha$.

<u>Exercice 2</u>

Soient $(E, \|.\|)$ un espace vectoriel normé, K une partie compacte de E et F une partie fermée de E.

Montrer que $K + F = \{a + b \mid a \in K, b \in F\}$ est une partie fermée de E.

<u>Exercice 3</u>

Soit K une partie non vide de $\mathbb{R}^n$, convexe, compacte, symétrique par rapport à 0 telle que 0 soit un point intérieur de K. On veut montrer qu'il existe une norme p sur $\mathbb{R}^n$ telle que K soit la boule unité de $\mathbb{R}^n$ pour p.

On introduit $p(x) = \inf \left\{ t > 0 \middle| \ \frac{1}{t}x \in K \right\}$ où $x \in \mathbb{R}^n$. Montrer que p est une norme qui répond au problème. Pour cela,

(i) Justifier que $p(x)$ est bien défini pour tout $x \in \mathbb{R}^n$.

(ii) Montrer que $p(x) = 0$ si et seulement si $x = 0$.

(iii) Pour x non nul, montrer que $p(x)^{-1}x \in K$.

(iv) Pour x non nul et $\lambda > 0$, montrer que $p(\lambda x) \leqslant \lambda p(x)$.

(v) Conclure.