INTÉGRATION - Session2

Eléments de correction[1]

Cours-exercice.

B]1) $\hat{f}(0) = 1/12$. Après calcul (IPP), on trouve pour tout $n \in \mathbb{Z}$ non nul: $\hat{f}(n) = \dfrac{(-1)^n}{2\pi^2 n^2}$.

2) On applique le théorème de Dirichlet (f est C^1 par morceaux et continue) en $x = 1/2$. On a $f(0) = 1/4$ et on obtient $\dfrac{1}{12} + \displaystyle\sum_{1\leq|n|\leq N} \dfrac{(-1)^n}{2\pi^2 n^2}(-1)^n \longrightarrow 1/4$ donc $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2} = \dfrac{\pi^2}{6}$.

Si on applique Parseval (f est dans L^2), on a $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{Z}} |\hat{f}(n)|^2 = \int |f|^2 d\lambda = \int_{-1/2}^{1/2} x^4\, dx = \dfrac{1}{5.2^4}$ donc $\dfrac{1}{12^2} + 2\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{4\pi^4 n^4} = \dfrac{1}{5.2^4}\cdot$ On en déduit $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^4} = \dfrac{\pi^4}{90}\cdot$

Exercice 1.

Dans les deux cas, on utilise le théorème de convergence dominée (exercice: le rédiger avec le théorème de convergence monotone).

1) Soit $f_n(x) = \dfrac{\cos\left(\mathrm{e}^{-n|\sin(x)|}\right)}{1 + x^2 + \mathrm{e}^{-nx}}$ pour $x \in \mathbb{R}^+$. Elle est continue sur $\mathbb{R}^+$. Elle est localement RI et son intégrale de Riemann généralisée converge car on a la domination $|f_n(x)| \leq g(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$, valable pour tout $x \in \mathbb{R}^+$ et tout entier n, avec g intégrable (continue et une primitive, *arctan* converge en l'infini). On a au passage l'existence de l'intégrale de l'énoncé et sa coïncidence avec l'intégrale au sens de Lebesgue.

D'autre part, pour tout $x \in \mathbb{R}^+ \setminus \pi\mathbb{N}$, on a $\mathrm{e}^{-n|\sin(x)|}$ tend vers 0 car $|\sin(x)| > 0$; et e^{-nx} tend vers 0 dès que $x > 0$. Comme $\pi\mathbb{N}$ est dénombrable donc de mesure nulle, on a que $f_n(x)$ converge vers $g(x)$ pour presque tout x.

On conclut donc: $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} \dfrac{\cos\left(\mathrm{e}^{-n|\sin(x)|}\right)}{1 + x^2 + \mathrm{e}^{-nx}}\, dx = \int_0^{+\infty} \dfrac{1}{1+x^2}\, dx = [\,\arctan(x)]_0^{\infty} = \dfrac{\pi}{2}\cdot$

2) Soit $h_n(x) = \dfrac{\sin\left(\arctan(nx)\right)}{\sqrt{1-x^2}}$ pour $x \in [0,1[$. Elle est continue sur $[0,1[$. Elle est localement RI et son intégrale de Riemann généralisée converge car on a la domination, valable pour tout $x \in [0,1[$ et tout entier n: $|h_n(x)| = h_n(x) \leq g(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, avec g intégrable (continue et une primitive, arcsin converge en 1). On a au passage l'existence de l'intégrale de l'énoncé et sa coïncidence avec l'intégrale au sens de Lebesgue.

D'autre part, pour tout $x \in]0,1[$, on a $\arctan(nx)$ tend vers $\pi/2$ car $x > 0$. Comme $\{0,1\}$ est de

[1]Pascal Lefèvre

mesure nulle, on a que $h_n(x)$ converge vers $\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ pour presque tout $x \in [0,1]$. On conclut donc:

$$\lim_{n\to+\infty} \int\limits_0^1 \frac{\sin\big(\arctan(nx)\big)}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \int\limits_{[0,1]} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,d\lambda = \lim_{A\to 1^-} \int\limits_0^A \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \lim_{A\to 1^-} \big[\arcsin x\big]_0^A = \frac{\pi}{2}\cdot$$

(la seconde égalité vient de la coïncidence entre l'intégrale au sens de Lebesgue et l'intégrale de Riemann généralisée)

Exercice 2.

$\mathcal{E}$ est un huitième d'ellipsoïde (plein) et l'image de l'ouvert $\Delta =]0,1[\times]0,\pi/2[\times]0,\pi/2[$ par le C^1 difféomorphisme $(r,\theta,\varphi) \overset{\Phi}{\longmapsto} \Big(ar\cos(\theta)\cos(\varphi), br\sin(\theta)\cos(\varphi), cr\sin(\varphi)\Big)$. On s'en assure comme dans la cas du changement en coordonnées sphériques (dont il s'agit d'une simple adaptation): Le jacobien vaut $abcr^2\cos(\varphi) > 0$. Ainsi le volume cherché est

$$\lambda_3(\mathcal{E}) = \int_{\mathcal{E}} d\lambda_3 = \int_{\Delta} abcr^2\cos(\varphi)\,d\lambda_3$$

Par Fubini-Tonnelli, ceci vaut

$$\int_{]0,1[}\Big(\int_{]0,\pi/2[}\Big(\int_{]0,\pi/2[} abcr^2\cos(\varphi)\,d\lambda\Big)\,d\lambda\Big)\,d\lambda = \int_0^1\int_0^{\pi/2}\int_0^{\pi/2} abcr^2\cos(\varphi)\,d\varphi\,d\theta\,dr = \frac{\pi}{6}abc\cdot$$

Pour $a=b=c$, on retrouve bien le volume d'un huitième de la boule correspondante.

Exercice 4.
cf CC1.