Licence de Mathématiques. Université d'Artois.
Durée 4h
21 Juin 2007.

Examen INTÉGRATION

session 2

Les calculatrices et les documents sont interdits.
La rédaction sera prise en compte dans la notation.

Exercice 1. (2 points)

Soient $a, b > 0$. Calculer l'aire (dans $\mathbb{R}^2$) de l'ellipse (pleine) d'équation $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} \leq 1$.

Exercice 2. (3 points)

Soit f une fonction continue sur $[0, 1]$. Calculer la limite suivante (si elle existe):

$$\lim_{h \to 0^+} \int_0^1 \frac{h}{h^2 + x^2} f(x)\, dx.$$

Indication: on pourra faire le changement $u = x/h$

Exercice 3. (8 points=1,5+(1+1,5)+(0,5+2)+0,5+1)

Pour $t \in \mathbb{R}^+ = [0, +\infty[$, on pose $f(t) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\, \mathrm{e}^{-tx} dx$.

1) Montrer que f est effectivement bien définie sur $\mathbb{R}^+$.

2)a) Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}^+$, $f(t) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos x}{x^2} (1 + tx)\, \mathrm{e}^{-tx} dx$.

b) Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^+$.

3) a) Justifier que pour tout $x > 0$, on a $\dfrac{\sin x}{x} = \displaystyle\int_0^1 \cos(xy)\, dy$.

b) En déduire que pour tout $t > 0$, on a $f(t) = \arctan(\dfrac{1}{t})$.

4) En déduire la valeur de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$.

5) En déduire la valeur de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 dx$.

Exercice 3. (3,5 points=1+2,5)

On fixe $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ et on pose $f(t) = \exp(2i\pi at)$ pour $t \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[$. On prolonge f par 1-périodicité à $\mathbb{R}$.

1) Calculer les coefficients de Fourier (complexes) de f.

2) Montrer que $\pi \text{cotan}(\pi a) = \dfrac{1}{a} + \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2a}{a^2 - n^2}$.

Exercice 4. (4,5 points=0,5+1+(1,5+1)+0,5)

Soient $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré et $f \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$.
On veut montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ vérifiant pour tout $E \in \mathcal{A}$:

$$\mu(E) \leq \delta \Longrightarrow \int_E |f| \, d\mu \leq \varepsilon$$

Supposons que ce ne soit pas le cas !

1) Justifier l'existence de $\varepsilon_0 > 0$ et d'une suite $E_n \in \mathcal{A}$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on ait: $\mu(E_n) \leq 2^{-n}$ et $\displaystyle\int_{E_n} |f| \, d\mu \geq \varepsilon_0$.

2) On pose $S_N = \displaystyle\bigcup_{n \geq N} E_n$ et $S = \displaystyle\bigcap_{N \in \mathbb{N}} S_N$. Justifier que S_N et $S \in \mathcal{A}$. Quelle est la mesure (relativement à μ) de S?

3)a) Montrer que $\displaystyle\lim_{N \to +\infty} \int_{S_N} |f| \, d\mu = \int_S |f| \, d\mu$.

b) En déduire que $\displaystyle\int_S |f| \, d\mu \geq \varepsilon_0$.

4) Conclure.