Université d'Artois
Faculté des Sciences Jean Perrin
L3 Mathématiques 2006–2007

MESURE et INTÉGRATION

Exercices à préparer pour le CC 2 du jeudi xx mai 2007

Un de ces exercices sera à faire en CC

EXERCICE 1

On pose :

$$f(t) = \int_0^{+\infty} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 \mathrm{e}^{-tx}\, dx\,, \qquad t \geqslant 0.$$

1) Montrer que f est continue sur $[0, +\infty[$.
2) Montrer que f est dérivable sur $]0, +\infty[$.
3) Montrer que f est deux fois dérivable sur $]0, +\infty[$ et calculer $f''(t)$ pour tout $t > 0$.
4) Calculer $\lim\limits_{t \to +\infty} f(t)$ et $\lim\limits_{t \to +\infty} f'(t)$.
5) En déduire la valeur de $f(t)$ pour tout $t \geqslant 0$.

EXERCICE 2

Soit $(X, \mathscr{T}, m)$ un espace mesuré et $f\colon X \to \mathbb{R}_+$ une application mesurable positive. On suppose que $0 < \displaystyle\int_X f\, dm < +\infty$, et on fixe $\alpha > 0$.

1) Montrer, à l'aide du Lemme de Fatou, que si $\alpha < 1$, on a :

$$\lim_{n \to \infty} \int_X n \log\left[1 + \left(\frac{f}{n}\right)^\alpha\right] dm = +\infty.$$

2) Pour $\alpha \geqslant 1$, calculer :

$$\lim_{n \to \infty} \int_X n \log\left[1 + \left(\frac{f}{n}\right)^\alpha\right] dm$$

(*indication : on utilisera le Théorème de convergence dominée, après avoir prouvé les inégalités* $1 + x^\alpha \leqslant (1 + x)^\alpha \leqslant \mathrm{e}^{\alpha x}$, *pour tout* $x \geqslant 0$).

EXERCICE 3

Dans cet exercice, on utilisera le résultat suivant, que l'on ne demande pas de montrer *: Si* $f\colon [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$ *est intégrable, alors* $\displaystyle\lim_{n \to \infty} \int_0^{2\pi} f(x)\, \sin(nx)\, dx = 0$ *et* $\displaystyle\lim_{n \to \infty} \int_0^{2\pi} f(x)\, \cos(nx)\, dx = 0$ *(lemme de Riemann-Lebesgue).*

On pose $A = \{x \in [0, 2\pi]\,;\ \lim\limits_{n \to \infty} \sin(nx) \text{ existe}\}$.

1) Montrer que A est un borélien de $[0, 2\pi]$.
2) Montrer que : $\displaystyle\lim_{n \to \infty} \int_0^{2\pi} \mathbb{1}_A(x)\, \sin^2(nx)\, dx = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \mathbb{1}_A(x)\, dx\,.$

3) On pose : $g(x) = \lim_{n\to\infty} \left[\mathbb{1}_A(x)\, \sin(nx) \right]$, pour $x \in [0, 2\pi]$; et on note $B_+ = \{g \geqslant 0\}$ et $B_- = \{g < 0\}$.

Montrer que :

$$\int_0^{2\pi} \mathbb{1}_{B_+}(x)\, g(x)\, dx = 0 \quad \text{et} \quad \int_0^{2\pi} \mathbb{1}_{B_-}(x)\, g(x)\, dx = 0\,,$$

et en déduire que $g = 0$ presque partout.

4) En déduire que A est négligeable pour la mesure de Lebesgue.

EXERCICE 4

1) Vérifier que pour tout $x > 0$, on a : $\dfrac{\sin x}{x} = \displaystyle\int_0^1 \cos(xy)\, dy.$

2) En déduire la valeur, pour tout $t > 0$ de :

$$g(t) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\, \mathrm{e}^{-tx}\, dx.$$

3) Vérifier que pour tout $x > 0$:

$$\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 = \int_0^1 \frac{\sin(2xy)}{x}\, dy.$$

4) En déduire la valeur, pour tout $t > 0$ de :

$$f(t) = \int_0^{+\infty} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 \mathrm{e}^{-tx}\, dx.$$

* * * * * * * * * * * * * * *