Université d'Artois
Faculté des Sciences Jean Perrin
L3 Mathématiques 2006–2007

MESURE et INTÉGRATION

Exercices à préparer pour le CC 1 du jeudi 15 mars 2007

Un de ces exercices sera à faire en CC

EXERCICE 1

Démontrer le résultat suivant (*Théorème de Doob*) : Soit X un ensemble et $f\colon X \to \mathbb{R}$ une application. On pose $\mathscr{T} = f^{-1}\big(\mathscr{B}or(\mathbb{R})\big)$.

1) Vérifier que $\mathscr{T}$ est une tribu de parties de X.

2) Soit $g\colon X \to \mathbb{R}$ une application mesurable pour la tribu $\mathscr{T}$ (et la tribu borélienne sur X). Montrer qu'il existe une application borélienne $h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $g = h \circ f$ (*Indication : on commencera par le cas où $g = \mathbb{I}_A$ est une fonction indicatrice ; puis on montrera que le résultat est vrai pour les fonctions étagées, puis pour les fonctions mesurables positives, et enfin on concluera dans le cas général*).

EXERCICE 2

1) Il s'agit de démontrer le *Théorème d'Egorov* : Soit $(X, \mathscr{T}, m)$ un espace mesuré **fini** : $m(X) < +\infty$; on considère une suite de fonctions mesurables $f_n\colon X \to \mathbb{R}$ convergeant simplement vers une fonction $f\colon X \to \mathbb{R}$. Alors, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $A_\varepsilon \in \mathscr{T}$ tel que $m(X \setminus A_\varepsilon) \leqslant \varepsilon$ et tel que $(f_n)_n$ converge uniformément sur A_ε vers f. Pour cela :

a) Pour tout entier $k \geqslant 1$ fixé, on pose $A_{n,k} = \bigcup_{j \geqslant n} \{|f_j - f| > 1/k\}$. Montrer que la suite $m(A_{n,k})_n$ est décroissante et tend vers 0 lorsque n tend vers l'infini.

b) Soit $\varepsilon > 0$ fixé. Construire une suite d'entiers $(n_k)_{k \geqslant 1}$ telle que $B_\varepsilon = \bigcup_{k \geqslant 1} A_{n_k,k}$ soit de mesure $m(B_\varepsilon) \leqslant \varepsilon$.

c) Montrer que $(f_n)_n$ converge uniformément vers f sur $A_\varepsilon = B_\varepsilon^c$.

EXERCICE 3

On veut utiliser le Théorème d'Egorov (Exercice 2) pour donner une preuve du Théorème de convergence dominée pour l'espace mesuré fini $(X, \mathscr{T}, m)$. Soit $f_n\colon X \to \mathbb{R}$ mesurables, convergeant simplement vers $f\colon X \to \mathbb{R}$; on suppose qu'il existe une application $g\colon X \to \mathbb{R}_+$ m-intégrable telle que $|f_n| \leqslant g$ pour tout n.

1) Montrer que les f_n et f sont m-intégrables.

2) Montrer que si la suite $(f_n)_n$ converge uniformément sur une partie $A \in \mathscr{T}$, alors $\lim_{n\to+\infty} \int_A |f_n - f|\, dm = 0$.

3) Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que $\int_B g\, dm \leqslant \varepsilon$ lorsque $m(B) \leqslant \delta$ (*pour un nombre M bien choisi, on décomposera B en $(B \cap \{g \leqslant M\}) \cup (B \cap \{g > M\})$*).

4) Conclure.

EXERCICE 4

Discuter selon les valeurs du nombre réel α la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{t^\alpha - 1}{\ln t}\, dt$.