Licence Mathématiques **2**.
Université d'Artois. 2022-2023.

Fonctions d'une Variable Réelle - Examen session 1

Éléments de correction.

Exercice 1. Soit Γ la fonction d'Euler.

Pour tout $z \in \mathbb{C}$ avec $Re(z) > 0$, on a

$$z\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} zt^{z-1}\mathrm{e}^{-t}\,dt$$

et on va procéder à une intégration par partie. L'identité (IPP) ci-dessous est légitimée (cf cours) car $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^{z-1}\mathrm{e}^{-t}\,dt$ converge puisque $Re(z) > 0$ d'une part (cf partie cours) et que les limites

$$\lim_{t\to 0^+} t^z\mathrm{e}^{-t} \qquad \text{et} \qquad \lim_{t\to+\infty} t^z\mathrm{e}^{-t}$$

existent d'autre part. En fait, on a

$$\lim_{t\to 0^+} t^z\mathrm{e}^{-t} = 0 \qquad \text{et} \qquad \lim_{t\to+\infty} t^z\mathrm{e}^{-t} = 0$$

car $|t^z\mathrm{e}^{-t}| = t^{Re(z)}\mathrm{e}^{-t} \sim t^{Re(z)} \longrightarrow 0$ quand $t \to 0^+$ et $|t^z\mathrm{e}^{-t}| = t^{Re(z)}\mathrm{e}^{-t} \longrightarrow 0$ par croissance comparée en l'infini.

On a donc

$$z\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} zt^{z-1}\mathrm{e}^{-t}\,dt = \Big[t^z\mathrm{e}^{-t}\Big]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} t^z\mathrm{e}^{-t}\,dt = (0-0) + \Gamma(z+1) = \Gamma(z+1)\ . \tag{IPP}$$

Exercice 2. Le point crucial dans la suite est que $\sigma = \dfrac{1}{2023} \in]0,1[$.

a) On applique le test de d'Alembert par exemple: $a_n > 0$ pour tout $n \geqslant 1$ et

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)^{\frac{n+1}{2}}}{(n+1)n^{\frac{n}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{n+1}}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\frac{n}{2}}$$

or $\dfrac{1}{\sqrt{n+1}} \longrightarrow 0$ et $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{\frac{n}{2}} = \sqrt{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n} \longrightarrow \sqrt{\mathrm{e}}$ donc

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 0 < 1$$

et la série converge.

b) On invoque le théorème des séries alternées: la suite de terme $\dfrac{1}{n^\sigma+1}$ est clairement décroissante vers 0. La série de terme général u_n est convergente.

c) Comme $|u_n| = \dfrac{1}{n^\sigma+1} \sim \dfrac{1}{n^\sigma}$ avec $\sigma < 1$: cette série est divergente (critère de Riemann) donc la série de terme général u_n n'est pas absolument convergente.

Exercice 3. Pour $n \geqslant 1$, on peut écrire

$$\rho_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{\sqrt{k^2+n^2}} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{\frac{k}{n}}{\sqrt{\left(\frac{k}{n}\right)^2+1}} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\Big(\frac{k}{n}\Big)$$

avec $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ pour $x \in [0,1]$.

Cette fonction f est continue sur $[0,1]$ donc Riemann intégrable et le théorème sur les sommes de Riemann donne donc la convergence de la suite $\big(\rho_n\big)_{n\geqslant 1}$ et

$$\lim_{n\to+\infty} \rho_n = \int_0^1 f(x)\,dx = \Big[\sqrt{x^2+1}\Big]_0^1 = \sqrt{2}-1\ .$$

Exercice 4. a) Là encore le point important est que $\lambda = \dfrac{2022}{2023} \in]0,1[$.

La fonction $x \in \mathbb{R}^{+*} \longmapsto \dfrac{\cos(x)}{x^\lambda}$ est continue donc localement Riemann intégrable.

Au voisinage de 0: $\dfrac{\cos(x)}{x^\lambda} \sim \dfrac{1}{x^\lambda}$ donc l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{\cos(x)}{x^\lambda}\,dx$ converge d'après le critère de Riemann ($\lambda < 1$).

Au voisinage de $+\infty$: on va invoquer le test d'Abel $x \in \mathbb{R}^{+*} \longmapsto \dfrac{1}{x^\lambda}$ est décroissante vers 0 ($\lambda > 0$). D'autre part pour tout $A > 1$, on a

$$\Big|\int_1^A \cos(x)\,dx\Big| = |\sin(A) - \sin(1)| \leqslant 2.$$

Ainsi l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos(x)}{x^\lambda}\,dx$ converge.

Conclusion $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\cos(x)}{x^\lambda}\,dx$ converge.

b) La fonction $x \in [-5,+\infty[\longmapsto \dfrac{1}{x^2+4x+13}$ est continue donc localement Riemann intégrable.

Au voisinage de $+\infty$: $\dfrac{1}{x^2+4x+13} \sim \dfrac{1}{x^2}$ donc $\displaystyle\int_{-5}^{+\infty} \frac{1}{x^2+4x+13}\,dx$ converge d'après le critère de Riemann ($2 > 1$).

$$\int_{-5}^{+\infty} \frac{1}{x^2+4x+13}\,dx = \int_{-5}^{+\infty} \frac{1}{(x+2)^2+3^2}\,dx = \frac{1}{9}\int_{-5}^{+\infty} \frac{1}{\left(\frac{x+2}{3}\right)^2+1}\,dx.$$

On effectue alors le changement de variable $y = \dfrac{x+2}{3}$ et on obtient

$$\int_{-5}^{+\infty} \frac{1}{x^2+4x+13}\,dx = \frac{1}{3}\int_{-1}^{+\infty} \frac{1}{y^2+1}\,dy = \frac{1}{3}\Big[\arctan(y)\Big]_{-1}^{+\infty} = \frac{1}{3}\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{4}\,.$$

Exercice 5. 1. 2a) (i) et b) reprennent le corrigé sur Moodle exo TD.

1. $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = f'(0)$ puisque f est dérivable en 0, donc la valeur choisie pour le prolongement par continuité est $f'(0)$. Il est clair que φ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^*$. Nous devons nous concentrer sur ce qui se passe en 0.

2. a) (i) Pour $x \neq 0$, on peut dériver φ autant qu'on veut en dehors de 0: la formule de Leibniz donne

$$\varphi^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(\frac{1}{x}\right)^{(n-k)} f^{(k)}(x) = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^{n-k}\,(n-k)!\,x^{-n+k-1}f^{(k)}(x)$$

puisque, pour tout entier $m \in \mathbb{N}$, on a

$$\left(\frac{1}{x}\right)^{(m)} = \left(x^{-1}\right)^{(m)} = (-1)^m\, m!\, x^{-m-1}\,.$$

On obtient donc $((-1)^{n-k} = (-1)^{n+k})$

$$x^{n+1}\varphi^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^{n+k}n!}{k!}\,x^k f^{(k)}(x)\,. \tag{1}$$

(ii) La formulation suggère fortement d'invoquer la formule de Taylor-Lagrange (cf aussi le corrigé évoqué).

Celle-ci s'écrit, en choisissant $a = x$ et $b = 0$, et puisque f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, à valeurs réelles: il existe un réel $c_{n,x}$ entre 0 et x tel que

$$0 = f(0) = \sum_{k=0}^{n}\frac{(0-x)^k}{k!}f^{(k)}(x) + \frac{(0-x)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}\big(c_{n,x}\big)\,.$$

En réarrangeant, on obtient bien

$$\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}\big(c_{n,x}\big) = \sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^{n+k}}{k!}\,x^k f^{(k)}(x)\,.$$

(iii) En utilisant les deux questions précédentes, on a en fait

$$\varphi^{(n)}(x) = \frac{1}{n+1} f^{(n+1)}\big(c_{n,x}\big) \ .$$

Mais on sait par hypothèse que $f^{(n+1)}$ est continue en 0 d'une part; et d'autre part $c_{n,x}$ est entre 0 et x donc $|c_{n,x}| \leqslant |x| \to 0$ quand $x \to 0$.

Ainsi $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} f^{(n+1)}\big(c_{n,x}\big) = f^{(n+1)}\big(0\big)$.

Conclusion

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} \varphi^{(n)}(x) = \frac{1}{n+1} f^{(n+1)}\big(0\big) \ .$$

b) On procède alors par récurrence en appliquant le théorème de prolongement de la dérivée. On sait que φ est continue sur $\mathbb{R}$ (on a choisi la valeur en 0 pour cela).

On a $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} \varphi'(x) = \dfrac{1}{2} f''(0)$ donc, d'après le théorème de prolongement de la dérivée, φ est dérivable, et même $\mathscr{C}^1$, en 0 et $\varphi'(0) = \dfrac{1}{2} f''(0)$.

On sait maintenant que φ' est continue sur $\mathbb{R}$.

On a $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} \varphi''(x) = \dfrac{1}{3} f^{(3)}(0)$ donc, d'après le théorème de prolongement de la dérivée, φ' est dérivable, et même $\mathscr{C}^1$, en 0 et $\varphi''(0) = \dfrac{1}{3} f^{(3)}(0)$. Ainsi φ est $\mathscr{C}^2$ en 0 donc sur $\mathbb{R}$.

Par récurrence, on obtient que pour tout $n \geqslant 1$, φ est $\mathscr{C}^n$ en 0 donc sur $\mathbb{R}$.

Finalement φ est $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.