Licence Mathématiques **2**.
Université d'Artois. 2022-2023.

EXAMEN - **session 1**

Fonctions d'une Variable Réelle.

3h

Les calculatrices et les documents sont interdits.
La rédaction sera prise en compte dans la notation.
(Barème indicatif=11,5+1+3+1,5+3+4 points)

Questions de cours:

C.1) Définir ce que signifie "la série de terme général a_n converge".

C.2) Rappeler la définition d'une série absolument convergente, puis montrer que toute série absolument convergente est convergente.

C.3) (i) Compléter l'énoncé suivant:

Etant données deux suites $\big(a_n\big)_{n\in\mathbb{N}}$ et $\big(b_n\big)_{n\in\mathbb{N}}$, on suppose que $a_n \sim b_n$, que la série de terme général a_n est à termes $\cdots$ et est divergente. Alors la série de terme général b_n est $\cdots$ vergente et on a $\cdots \sim \cdots$.

(ii) Démontrer ce résultat.

C.4) Enoncer le théorème de Heine (en rappelant la définition de "fonction uniformément continue").

C.5) Rappeler l'énoncé sur la formule de Taylor-Lagrange, puis la démontrer.

C.6) Rappeler la définition de la fonction Γ d'Euler et justifier qu'elle est effectivement bien définie.

C.7) Montrer qu'une fonction convexe sur un segment est bornée.

Exercice 1. Soit Γ la fonction d'Euler.
Montrer que pour tout $z \in \mathbb{C}$ avec $Re(z) > 0$, on a $z\Gamma(z) = \Gamma(z+1)$.

Exercice 2. On pose $\sigma = \dfrac{1}{2023}\cdot$

a) Justifier que la série de terme général $a_n = \dfrac{n^{\frac{n}{2}}}{n!}$ (où $n \geqslant 1$) est convergente.

b) Justifier que la série de terme général $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n^\sigma + 1}$ (où $n \in \mathbb{N}$) est convergente.

c) Est-ce que que la série de terme général u_n (cf b.) est absolument convergente ?

Exercice 3. Justifier l'existence de la limite de la suite $\big(\rho_n\big)_{n\geqslant 1}$ (et calculer cette limite), suite définie pour $n \geqslant 1$ par

$$\rho_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{\sqrt{k^2+n^2}}\,\cdot$$

Exercice 4.

a) On pose $\lambda = \dfrac{2022}{2023}\cdot$ Justifier la convergence (l'existence) de l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos(x)}{x^\lambda}\, dx\,.$$

b) Justifier la convergence (l'existence) de l'intégrale suivante et la calculer.

$$\int_{-5}^{+\infty} \frac{1}{x^2+4x+13}\, dx\,.$$

Exercice 5. Soit f une fonction de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, à valeurs réelles, vérifiant $f(0)=0$. On considère la fonction φ définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\varphi(x) = \begin{cases} \dfrac{f(x)}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ ? & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

1. Quelle valeur choisir pour "?" (<u>et on la gardera pour la suite</u>) pour que φ soit continue ?
2. On veut montrer que φ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

a) Soient $x \neq 0$ et $n \geqslant 1$ (entier).

(i) En utilisant la formule de Leibniz, montrer que

$$\varphi^{(n)}(x) = \frac{n!}{x^{n+1}} \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^{n+k}}{k!}\, x^k f^{(k)}(x)\,.$$

(ii) En choisissant judicieusement une des formules de Taylor, montrer qu'il existe un réel $c_{n,x}$ entre 0 et x tel que

$$\frac{x^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}\big(c_{n,x}\big) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^{n+k}}{k!}\, x^k f^{(k)}(x)$$

b) Déterminer $\displaystyle\lim_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} \varphi^{(n)}(x)$.

c) Conclure