EXAMEN ANALYSE 1 - session 1 Éléments de correction

Cours et applications.

Voir COURS/TD

Exercice 1

Voir TD

Exercice 2

Voir TD

Exercice 3

Voir TD pour un exercice similaire.

Pour la question 2., on applique le 1. à la fonction ln qui est bien continue et surjective de $\mathbb{R}^{*+}$ sur $\mathbb{R}$.

Par ailleurs, $\mathbb{Q}^{+} = \mathbb{Q} \cap \mathbb{R}^{*+}$ est dense dans $\mathbb{R}^{*+}$, car tout réel strictement positif est limite d'une suite de rationnels (car $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$) qui sont nécessairement strictement positifs à partir d'une certain rang.

On en déduit que $\left\{ \ln(p/q) \mid p, q \geqslant 1 \text{ entiers} \right\}$ est dense dans $\mathbb{R}$.
Comme $\ln(p/q) = \ln(p) - \ln(q)$ on a la conclusion.

Exercice 4

Il s'agit d'une version pondérée du lemme de Cesàro.

1) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} 2^k = \frac{1-2^{n+1}}{1-2} = 2^{n+1} - 1$ (somme des termes successifs d'une suite géométrique).

Donc la limite de $\displaystyle\frac{1}{2^{n+1}} \sum_{k=0}^{n} 2^k = 1 - \frac{1}{2^{n+1}}$ existe et vaut 1.

2) Puisque $\left(x_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels qui converge vers ℓ, il existe un entier $n_0 \geqslant 1$ tel que pour $n \geqslant n_0$, on a

$$\left|x_n - \ell\right| \leqslant \varepsilon\ .$$

Ainsi, par l'inégalité triangulaire,

$$\left|\frac{1}{2^{n+1}}\sum_{k=0}^{n} 2^k(x_k-\ell)\right| \leqslant \frac{1}{2^{n+1}}\sum_{k=0}^{n} 2^k|x_k-\ell|$$

puis, en coupant la somme en deux, on a

$$\frac{1}{2^{n+1}}\sum_{k=0}^{n} 2^k|x_k-\ell| \leqslant \frac{1}{2^{n+1}}\left(\sum_{k=0}^{n_0-1} 2^k|x_k-\ell|\right) + \frac{1}{2^{n+1}}\left(\sum_{k=n_0}^{n} 2^k|x_k-\ell|\right)$$

or pour $k \geqslant n_0$, on a $|x_k-\ell| \leqslant \varepsilon$, d'où

$$\sum_{k=n_0}^{n} 2^k|x_k-\ell| \leqslant \sum_{k=n_0}^{n} 2^k\varepsilon \leqslant \varepsilon\sum_{k=0}^{n} 2^k \leqslant 2^{n+1}\varepsilon$$

d'après le 1.

Finalement, on obtient bien

$$\left|\frac{1}{2^{n+1}}\sum_{k=0}^{n} 2^k(x_k-\ell)\right| \leqslant \frac{1}{2^{n+1}}\left(\sum_{k=0}^{n_0-1} 2^k|x_k-\ell|\right) + \varepsilon\ .$$

3) D'une part $\lim \dfrac{1}{2^{n+1}} = 0$ et d'autre part le terme $\displaystyle\sum_{k=0}^{n_0-1} 2^k|x_k-\ell|$ ne dépend pas de n. Ainsi $\dfrac{1}{2^{n+1}}\left(\displaystyle\sum_{k=0}^{n_0-1} 2^k|x_k-\ell|\right)$ converge vers 0.

On peut affirmer qu'il existe un entier n_1 tel que pour tout $n \geqslant n_1$, on a

$$\frac{1}{2^{n+1}}\left(\sum_{k=0}^{n_0-1} 2^k|x_k-\ell|\right) \leqslant \varepsilon$$

et au final, pour tout entier $n \geqslant \max(n_0; n_1)$, on a

$$\left|\frac{1}{2^{n+1}}\sum_{k=0}^{n} 2^k(x_k-\ell)\right| \leqslant 2\varepsilon\ .$$

On en déduit bien que

$$\lim\ \frac{1}{2^{n+1}}\sum_{k=0}^{n} 2^k(x_k-\ell) = 0\ .$$

4) On se souvient que $\gamma_n = \dfrac{1}{2^{n+1}}\displaystyle\sum_{k=0}^{n} 2^k x_k$, où $n \in \mathbb{N}$.

Ainsi la question précédente nous donne:

$$\gamma_n - \frac{1}{2^{n+1}} \sum_{k=0}^{n} 2^k \ell \longrightarrow 0$$

or d'après la question 1. on sait que

$$\frac{1}{2^{n+1}} \sum_{k=0}^{n} 2^k \ell \longrightarrow \ell \ .$$

Finalement $\gamma_n = \gamma_n - \frac{1}{2^{n+1}} \sum_{k=0}^{n} 2^k \ell + \frac{1}{2^{n+1}} \sum_{k=0}^{n} 2^k \ell$ converge vers $0 + \ell = \ell$.