Licence de Mathématiques.
Université d'Artois. 2021-2022.

EXAMEN
ANALYSE 1

Les calculatrices et les documents sont interdits.
La rédaction sera prise en compte dans la notation.

Cours et applications. (8 points=3.5+1+1+1,5+1)

1) a) Donner la définition de la borne supérieure d'une partie $E \subset \mathbb{R}$, puis en donner une caractérisation (avec "ε") *sans preuve.*

b) Application: soient A et B deux parties majorées (non vides) de $\mathbb{R}$. On note

$$S = \{a + b \mid a \in A \text{ et } b \in B\}$$

(i) Pourquoi A, B et S admettent une borne supérieure ?

(ii) Montrer que $\sup S = \sup A + \sup B$.

2) Donner la définition d'une suite de Cauchy.

3) Enoncer le théorème de Bolzano-Weierstrass.

4) Enoncer (sans démontrer) le théorème de monotonie des suites définies par itération.

5) Montrer que toute fonction lipschitzienne est uniformément continue.

Exercice 1 (2.5 points=0.5+2)

Pour $n \geqslant 1$ entier, on définit: $H_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \cdot$

1) Montrer que la suite $\big(H_n\big)_{n \geqslant 1}$ est croissante.

2) Montrer que pour tout $n \geqslant 1$, $H_{2n} - H_n \geqslant \dfrac{1}{2}$ et en déduire que $\big(H_n\big)_{n \geqslant 1}$ diverge vers $+\infty$.

Exercice 2 (1.5 points)

Soit f une fonction continue sur un intervalle I, et qui ne s'annule pas sur I. Montrer que f est de signe constant.

Exercice 3 (3.5 points=2+1.5)

1) Soit $f :]0,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ continue et surjective. On considère une partie dense D de $]0,+\infty[$. Montrer que $f(D)$ est dense dans $\mathbb{R}$.
2) Montrer que $\Big\{ \ln(p) - \ln(q) \mid p, q \geqslant 1 \text{ entiers} \Big\}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

Exercice 4 (6 points=1.5+2,5+1.5+0.5)

Soit $\big(x_n\big)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels qui converge vers ℓ.
On considère la suite définie par

$$\gamma_n = \frac{1}{2^{n+1}} \sum_{k=0}^{n} 2^k x_k \quad , \text{ où } n \in \mathbb{N}.$$

On veut montrer que $\big(\gamma_n\big)_{n\in\mathbb{N}}$ converge aussi vers ℓ.

On se donne $\varepsilon > 0$.

1) Exprimer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} 2^k$ à l'aide de n (sous forme simplifiée).

En déduire la limite de $\displaystyle \frac{1}{2^{n+1}} \sum_{k=0}^{n} 2^k$.

2) Montrer qu'il existe un entier $n_0 \geqslant 1$ tel que pour $n \geqslant n_0$, on a

$$\left| \frac{1}{2^{n+1}} \sum_{k=0}^{n} 2^k (x_k - \ell) \right| \leqslant \frac{1}{2^{n+1}} \left(\sum_{k=0}^{n_0-1} 2^k |x_k - \ell| \right) + \varepsilon \, .$$

3) En déduire que

$$\lim \frac{1}{2^{n+1}} \sum_{k=0}^{n} 2^k (x_k - \ell) = 0 \, .$$

4) Conclure.