# EXAMEN - **session 1**

## CALCULUS 1

**2h**

*Les calculatrices et les documents sont interdits.*
*La rédaction sera prise en compte dans la notation.*
*Répondre dans la copie. Ne pas laisser de sujet ou de brouillon dans la copie.*
(Barème indicatif $= 2{,}5 + 4{,}5 + 3 + 2{,}5 + 7{,}5$ points)

**Cours.**

a) Énoncer le théorème des valeurs intermédiaires.

b) Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Justifier que la limite suivante existe et la calculer *(on détaillera le calcul)*:

$$\lim_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{\alpha}{x}\right)^x =$$

**Exercice 1.** Résoudre les inéquations suivantes (on indique que $961 = 31^2$)

a) $12x^2 + x - 20 < 0$ b) $\left|30x^2 - 17x - 16\right| < 6x^2 - 19x + 24$ où $x \in \mathbb{R}$.

**Exercice 2.** On considère $f(x) = \dfrac{\big(\ln(x)\big)^2 - 2}{\big(\ln(x)\big)^2 + 1}$.

a) Justifier rapidement que son domaine de définition est $]0, +\infty[$ et que $f$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0, +\infty[$ puis calculer $f'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}^{+*}$.

b) Ecrire l'équation de la tangente au point d'abscisse e à la courbe représentative de $f$.

**Exercice 3.** Que valent les limites suivantes ? *(on justifiera la réponse)*

- $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{3\big(\ln(x)\big)^{2024} + 3\big(\ln(x)\big)^{2025} + 5}{9\big(\ln(x)\big)^{2025} + 2\sqrt{x}}$
- $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{\left(\left(\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}\right)^3\right)^5}{\sqrt{\mathrm{e}^{-7x}}.\mathrm{e}^{-4x}}$.

**Exercice 4.**

(i) Calculer les intégrales suivantes:

- $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{2x-3}\,\mathrm{d}x$
- $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{2024\cos(x)}{\big(\sin(x)\big)^{2025}}\,\mathrm{d}x$
- $\displaystyle\int_{-1}^1 (x+1)\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$

(ii) Calculer l'intégrale $\displaystyle\int_1^{\sqrt{2}} x^3 \,.\, (x^2-1)^{\frac{4}{3}}\,\mathrm{d}x$ en effectuant le changement de variable $t = \sqrt[3]{x^2-1}$.