Exercice 1.

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 0,\ u_1 = 1$ et $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Montrer que $\forall (n,p) \in \mathbb{N}^2,\ \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \mathrm{C}_n^k u_{p+k} = u_{2n+p}$.

Exercice 2.

Soient E un ensemble non vide, A et B deux parties de E et $f : \mathcal{P}(E) \longrightarrow \mathcal{P}(E)$ telle que $\forall X \in \mathcal{P}(E),\ f(X) = (X \cap A) \cup B$.

L'ensemble $\mathcal{P}(E)$ est ordonné par la relation d'inclusion.

1) Montrer que f est une application croissante.
2) Montrer que, dans la définition de f, A peut être remplacé par n'importe quel élément d'une partie $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(E)$ que l'on déterminera. Trouver le plus petit élément de $\mathcal{A}$.
3) Déterminer l'image de $\mathcal{P}(E)$ par f.
4) On définit une relation $\sim$ sur $\mathcal{P}(E)$ par

$$\forall (X,Y) \in \mathcal{P}(E) \times \mathcal{P}(E), \quad X \sim Y \Longleftrightarrow f(X) = f(Y).$$

Vérifier que $\sim$ est bien une relation d'équivalence sur $\mathcal{P}(E)$, et donner la classe d'un élément $X \in \mathcal{P}(E)$.

Exercice 3.

Soient E un ensemble et $\mathscr{O}(E)$ l'ensemble des relations d'ordre définies sur E.

Si O_1 et O_2 sont deux éléments de $\mathscr{O}(E)$, on dira que O_1 est *plus fine* que O_2 et on notera $O_1 \prec O_2$, si et seulement si

$$\forall (x,y) \in E \times E, \quad xO_1y \Rightarrow xO_2y.$$

1) Démontrer que la relation $\prec$ est une relation d'ordre sur $\mathscr{O}(E)$.
2) Existe-t-il un plus petit élément de $\mathscr{O}(E)$ pour cette relation ?
3) Soit O un ordre total sur E. Démontrer que O est un élément maximal de $\mathscr{O}(E)$ relativement à $\prec$.
4) Soit R un ordre non total sur E et a et b deux éléments de E non comparables par R. Soit S la relation définie par :

$$\forall (x,y) \in E \times E, \quad xSy \Longleftrightarrow (xRy) \text{ ou } (xRa \text{ et } bRy).$$

Démontrer que S est une relation d'ordre distincte de R et telle que $R \prec S$.
5) Déterminer tous les éléments maximaux de $\mathscr{O}(E)$ pour la relation $\prec$.