

EXAMEN - session 1 - Suites et séries de fonctions
Eléments de correction

Exercice 1.

On utilise la formule de Hadamard: $R = \left(\overline{\lim} |a_m|^{\frac{1}{m}} \right)^{-1}$ où la série entière est $\sum_{m \geq 1} a_m z^m$.

Ici, on a $a_m = 0$ si $m = 0$ ou m est impair; et $a_m = \left(\cos \left(\frac{1}{n} \right) \right)^{n^3}$ si $m = 2n$ où $n \geq 1$.

On constate que $\lim n^2 \ln \left(\cos \left(\frac{1}{n} \right) \right) = -\frac{1}{2}$ après D.L. donc $\lim \left| \cos \left(\frac{1}{n} \right) \right|^{\frac{n^3}{2n}} = e^{-\frac{1}{4}}$.

Ainsi, il y a deux valeurs d'adhérence pour la suite de terme $|a_m|^{\frac{1}{m}}$, à savoir 0 et $e^{-\frac{1}{4}}$ donc $R = \sqrt[4]{e}$.

Exercice 2.

1) D'après le cours, on connaît le DSE de la fonction $x \mapsto (1+x)^\alpha$ donc en prenant $\alpha = \frac{1}{2}$ on obtient

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{4^n} \binom{2n}{n} x^{2n} = 1 + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{4^{n+1}} \binom{2n+2}{n+1} x^{2n+2}.$$

Ainsi

$$\forall x \in]-1, 0[\cup]0, 1[, \quad \frac{1}{x} \left(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - 1 \right) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{2n+1}$$

avec

$$a_n = \frac{1}{4^{n+1}} \binom{2n+2}{n+1}.$$

2) En dérivant f , on trouve

$$\forall x \in]-1, 1[, \quad f'(x) = \frac{\frac{1}{\sqrt{1+x}} - \frac{1}{\sqrt{1-x}}}{2(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x})} = \frac{\sqrt{1-x} - \sqrt{1+x}}{2\sqrt{1-x^2}(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x})}.$$

En multipliant en haut et en bas par $\sqrt{1-x} - \sqrt{1+x}$ (pour x non nul, pour que cette expression soit non nulle !), on obtient

$$\forall x \in]-1, 0[\cup]0, 1[, \quad f'(x) = \frac{1 - \sqrt{1-x^2}}{2x\sqrt{1-x^2}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{2} x^{2n+1}.$$

Ce développement se prolonge en $x = 0$ car on constate que $f'(0) = 0$ dans notre première expression de f' (ou encore parce qu'on sait dès le début que f est de classe $\mathcal{C}^1$ au moins, sur $] -1, 1[$).

Par intégration, on obtient le développement en série entière de f (qui a même rayon de convergence : 1), en tenant compte de $f(0) = \ln(2)$:

$$\forall x \in]-1, 1[, f(x) = \ln(2) + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{2(2n+2)} x^{2n+2} = \ln(2) + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{4^{n+2}(n+1)} \binom{2n+2}{n+1} x^{2n+2}.$$

Exercice 3.

1) A $x \geq 0$ fixé, on a $f_n(x) = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$ donc la série converge ponctuellement d'après le critère de Riemann ($2 > 1$): on a convergence simple.

2) En fait, on a convergence normale (donc uniforme !) sur $\mathbb{R}^+$ car $\sup_{x \geq 0} |f_n(x)| \leq \frac{1}{n^2}$ qui est le terme général d'une série convergente (comme précédemment). Par ailleurs les fonctions f_n sont continues sur $\mathbb{R}^+$. Ainsi S est continue sur $\mathbb{R}^+$.

3) Les fonctions f_n sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^+$ et leur dérivée vaut $f'_n(x) = -e^{-n^2x}$ pour $x \geq 0$ et $n \geq 1$. Mais on n'a pas convergence uniforme de la série des f'_n sur $\mathbb{R}^{*+}$, car $\sup_{x > 0} |f'_n(x)| = 1 \not\rightarrow 0$.

Comme d'habitude dans ce genre de situation, on va raisonner d'abord sur tout intervalle $]a, +\infty[$ où $a > 0$. On constate que

$$\sup_{x > a} |f'_n(x)| = \sup_{x > a} e^{-n^2x} = e^{-n^2a}$$

qui est le terme général d'une série convergente, par exemple parce que inférieur à $e^{-na} = (e^{-a})^n$ (géométrique de raison $e^{-a} < 1$).

Ainsi $f_n|_{]a, +\infty[}$ est $\mathcal{C}^1$ et la série des dérivées converge normalement (donc uniformément !) sur $]a, +\infty[$. Ainsi $S|_{]a, +\infty[}$ est $\mathcal{C}^1$ et on a pour tout $x > a$:

$$S'(x) = - \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-n^2x}.$$

Maintenant, pour tout $x > 0$, il existe $a \in]0, x[$ donc d'après ce qui précède, S est $\mathcal{C}^1$ au point x et $S'(x) = - \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-n^2x}$.

Exercice 4.

1) La fonction φ est continue par morceaux sur tout segment de $\mathbb{R}$ (la fonction restreinte à $]-\pi, \pi[$ coïncide avec une fonction qui est continue sur $[-\pi, \pi]$) et 2π -périodique. On peut calculer les coefficients de Fourier pour tout $n \in \mathbb{Z}$: $\hat{\varphi}(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(t) e^{-int} dt$.

On a $\hat{\varphi}(0) = \frac{\pi^2}{3}$ et pour tout entier n non nul, on obtient après une double I.P.P.:

$$\hat{\varphi}(n) = 2 \frac{(-1)^n}{n^2}.$$

En appliquant le théorème de Dirichlet à φ qui est de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux, on a, en $x = 0$:

$$\lim_{n \rightarrow -N} \sum_{n=-N}^N \hat{\varphi}(n) e^{in0} = \frac{\varphi(0^+) + \varphi(0^-)}{2} = \varphi(0) = 0$$

car φ est continue en 0. Comme $\sum_{n=-N}^N \hat{\varphi}(n) = \frac{\pi^2}{3} + 2 \sum_{n=1}^N 2 \frac{(-1)^n}{n^2}$, on obtient finalement

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} = -\frac{\pi^2}{12}.$$

En appliquant le théorème de Dirichlet en $x = \pi$, on obtient

$$\lim_{n \rightarrow -N} \sum_{n=-N}^N \hat{\varphi}(n) e^{in\pi} = \frac{\varphi(\pi^+) + \varphi(\pi^-)}{2} = \frac{\pi^2 + \pi^2}{2} = \pi^2$$

donc

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

On pouvait aussi déduire cette seconde somme de la première en séparant les sommes sur les indices pairs et impairs (cf T.D.).

2) On constate que la fonction θ est continue sur le segment $[0, 1]$ donc I est bien définie.

b) On sait que $\ln(1+t)$ est développable en série entière, de rayon de convergence 1 avec

$$\ln(1+t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1} t^n}{n}$$

Ainsi pour t non nul:

$$\theta(t) = \frac{\ln(1+t)}{t} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1} t^{n-1}}{n} = \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{(-1)^m t^m}{m+1}.$$

C'est bien sûr encore vrai pour $t = 0$ (car $\theta(0) = 1$).

c) On fixe $x \in [0, 1[$. On a convergence uniforme (même normale) de la série entière précédente sur tout segment inclus dans $] -R, R[$ donc sur $[0, x]$ puisque $x < 1 = R$. Par convergence uniforme, on peut intervertir signe somme et intégral:

$$\int_0^x \frac{\ln(1+t)}{t} dt = \int_0^x \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1} t^{n-1}}{n} dt = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \int_0^x t^{n-1} dt = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n^2}.$$

d) On a convergence normale (donc uniforme) sur $[0, 1]$ car $\sup_{x \in [0, 1]} \left| \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n^2} \right| = \frac{1}{n^2}$
 qui est le terme général d'une série convergente.

3) On peut donc passer à la limite quand $x \rightarrow 1^-$ et on a alors

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n^2} \longrightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2}.$$

On conclut donc que (cf 1.c.)

$$I = \lim_{x \rightarrow 1^-} \int_0^x \frac{\ln(1+t)}{t} dt = \lim_{x \rightarrow 1^-} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}$$

d'après 1.b.