Licence de Mathématiques.
Université d'Artois.
13 mai 2016.
Durée 3h

EXAMEN - session **1**
SUITES ET SERIES DE FONCIONS

Les calculatrices et les documents sont interdits.
La rédaction sera prise en compte dans la notation.

Cours-Applications. (4,5 points=1+2+1,5)

1) Donner le développement en série entière de $z \longmapsto \dfrac{1}{z-a}$ où $a \in \mathbb{C}^*$. (préciser le rayon de convergence).

2) Soit $(X, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé.

a) Rappeler la définition d'une suite de Cauchy et de ce que signifie que $(X, \|\cdot\|)$ est complet.

b) Enoncer le théorème du point fixe.

3) Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions continues sur un intervalle I. On suppose que cette suite converge uniformément sur I vers $f : I \to \mathbb{R}$. Démontrer que f est continue.

Exercice 1. (1,5 points)

Déterminer le rayon de convergence de la série entière: $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\left(\cos\left(\frac{1}{n}\right)\right)^{n^3} z^{2n}$.

Exercice 2. (3 points=1,5+1,5)

On considère la fonction $f(x) = \ln\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}\right)$ pour $x \in]-1,1[$.

1) Montrer qu'il existe une suite de réels $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que

$$\forall x \in]-1,0[\cup]0,1[\,, \qquad \frac{1}{x}\left(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}-1\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{2n+1}\,.$$

(*on précisera la valeur des a_n sous forme simple*)

2) En dérivant f, en déduire son développement en série entière. Préciser le rayon de convergence.

Exercice 3. (3,5 points=0,5+1+2)

Soit $(f_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de fonctions définie pour tout $x \in \mathbb{R}^+$ par $f_n(x) = \dfrac{1}{n^2}\mathrm{e}^{-n^2 x}$.

1) Justifier la convergence simple de la série de terme général de f_n sur $\mathbb{R}^+$.

On note alors $S(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}\mathrm{e}^{-n^2 x}$.

2) Montrer que S est continue sur $\mathbb{R}^+$.

3) Montrer que S est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^{+*}$ et exprimer S' (à l'aide d'une série).

Exercice 4. (8 points=(1,5+1,5)+(0,5+1+1,5+1)+1)

1) Soit φ la fonction 2π-périodique définie pour $x \in]-\pi, \pi]$ par $\varphi(x) = x^2$.

a) Calculer les coefficient de Fourier de φ.

b) En déduire les valeurs des sommes $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$ et $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$.

2) On s'intéresse à $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(1+t)}{t}\, dt$ et on définit $\theta(t) = \dfrac{\ln(1+t)}{t}$ si $t > -1$, non nul; et $\theta(0) = 1$.

a) Justifier que I est bien définie.

b) Montrer que $t \in]-1, 1[\longmapsto \theta(t)$ est développable en série entière (préciser le rayon de convergence et les coefficients).

c) On fixe $x \in [0, 1[$. Montrer que $\displaystyle\int_0^x \frac{\ln(1+t)}{t}\, dt = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}x^n}{n^2}$.

d) Montrer que la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^{n-1}x^n}{n^2}$ converge uniformément sur $[0, 1]$.

3) En déduire la valeur de I.