

Licence de Mathématiques.
Université d'Artois.
21 juin 2016.
Durée 3h

EXAMEN - session 2
SUITES ET SERIES DE FONCTIONS

*Les calculatrices et les documents sont interdits.
La rédaction sera prise en compte dans la notation.*

Cours-Applications. (6 points)

1) Donner les développements en série entière des fonctions suivantes (sans justification) et préciser le rayon de convergence.

$$(a) \quad z \mapsto \frac{1}{z-a} \quad \text{où } a \in \mathbb{C}^* \qquad (b) \quad x \mapsto (1+x)^\alpha \quad (\alpha \notin \mathbb{N})$$

2) Soit $(X, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé.

Rappeler la définition d'une suite de Cauchy et de ce que signifie que $(X, \|\cdot\|)$ est complet.

3) Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur un intervalle borné I . On suppose que la suite $(f'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément sur I vers $g : I \rightarrow \mathbb{R}$. En rajoutant une hypothèse convenable, montrer que la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément sur I vers une fonction $f : I \rightarrow \mathbb{R}$. Que peut-on dire de f ? Justifier ce résultat.

Exercice 1. (1,5 points)

Déterminer la rayon de convergence de la série entière: $\sum_{n \geq 1} \left(1 + \frac{(-1)^{n^2}}{n^2}\right)^{n^4} z^{n^2}$.

Exercice 2. (3,5 points)

Calculer les sommes des séries entières suivantes. On précisera d'abord le rayon de convergence (et donc avec quelles valeurs de x on travaille)

- 1) $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2n+1} x^{2n+1}$.
- 2) $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \right) x^n$. (Indication: on pourra faire intervenir $a_k = 1$ où $k \in \mathbb{N}$ et $b_k = \frac{1}{k}$ où $k \geq 1$)

Exercice 3. (3 points)

Soit $(f_n)_{n \geq 1}$ une suite de fonctions définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $f_n(x) = \frac{1}{n} \sin\left(\frac{x}{n}\right)$.

- 1) Justifier la convergence simple de la série de terme général de f_n sur $\mathbb{R}$.

On note alors pour $x \in \mathbb{R}$, $S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \sin\left(\frac{x}{n}\right)$.

- 2) Montrer que S est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et exprimer S' (à l'aide d'une série).

Exercice 4. (7 points)

- 1) Soit φ la fonction 2π -périodique définie pour $x \in]-\pi, \pi]$ par $\varphi(x) = x$.

a) Calculer les coefficients de Fourier de φ .

- b) En déduire la valeur de la somme $A = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$.

- c) Montrer que $\sum_{m=0}^{+\infty} \frac{1}{(2m+1)^2} = \frac{3}{4}A$ puis en déduire la somme $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$

- 2) On s'intéresse à $I = \int_0^1 \frac{\ln(1+t)}{t} dt$ et on définit $\theta(t) = \frac{\ln(1+t)}{t}$ si $t > -1$, non nul; et $\theta(0) = 1$.

a) Justifier que I est bien définie.

b) Montrer que $t \in]-1, 1[\mapsto \theta(t)$ est développable en série entière (préciser le rayon de convergence et les coefficients).

- c) On fixe $x \in [0, 1[$. Montrer que $\int_0^x \frac{\ln(1+t)}{t} dt = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n^2}$.

- d) Montrer que la série de fonctions $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n^2}$ converge uniformément sur $[0, 1[$.

- 3) En déduire la valeur de I .