Licence de Mathématiques.
Université d'Artois.
11 mai 2015.
Durée 3h

EXAMEN - session **1**
ANALYSE 4

Les calculatrices et les documents sont interdits.
La rédaction sera prise en compte dans la notation.

Cours-Applications. (5,5 points=2+1+2,5)

1) Donner les développements en série entière des fonctions suivantes (sans justification) et préciser le rayon de convergence.

(a) $z \longmapsto \exp(z)$ (b) $x \longmapsto \cos(x)$

2) Énoncer le théorème de Parseval.

3) Soit $\left(f_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions continues sur un intervalle I. On suppose que cette suite converge uniformément sur I vers $f : I \to \mathbb{R}$.

a) Que peut-on dire de f ?

b) Démontrer ce résultat.

<u>Exercice 1.</u> (1,5 points)

Justifier que la fonction F suivante est bien définie et montrer qu'elle est de classe $\mathscr{C}^1$. On donnera une expression de sa dérivée F' :

$$x \in \mathbb{R} \longmapsto \int_0^1 \mathrm{e}^{x\sin^2(t)}\, dt$$

<u>Exercice 2.</u> (3 points)

Calculer $\displaystyle\iint_{\mathscr{D}} x^2 y \cos\left(y^3 x\right)\, dxdy$ où $\mathscr{D} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^{+*} \times \mathbb{R}^{+*} \mid y^4 < x \,, x^2 < y \right\}$

(*on pourra faire un changement de variable* $(x,y) \in \mathscr{D} \mapsto (x^2/y; y^4/x)$ *dont on précisera l'image*)

Exercice 3. (3 points=1+2)

Soient $a \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}$ et f la fonction 2π-périodique définie pour $t \in [-\pi, \pi[$ par

$$f(t) = \exp(iat).$$

1) Calculer les coefficients de Fourier de f.

2) En déduire que

$$\pi\text{cotan}(\pi a) = \frac{1}{a} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2a}{a^2 - n^2} \cdot$$

Exercice 4. (6,5 points=2+1,5+2+1)

1) On fixe un réel $x \in]-1, +1[$ et $n \in \mathbb{N}$, justifier l'existence des intégrales :

$$W_n = \int_0^{\pi/2} \Big(\cos(t)\Big)^{2n} dt \qquad \textit{et} \qquad F(x) = \int_0^{\pi/2} \frac{1}{1 - x\cos^2(t)}\, dt$$

puis calculer $F(x)$ pour $x \in]-1, +1[$.

Indication : on pourra faire le changement de variable $t \mapsto u = \tan(t)$.

2) Justifier que pour tout $x \in]-1, +1[$, on a $F(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} W_n x^n$.

3) Donner les développements en série entière des fonctions suivantes (on précisera le rayon de convergence).

a) $x \longmapsto \big(1 - x\big)^{\alpha}$ où $\alpha \in \mathbb{R}$ *(sans justification)*

b) En déduire celui de $x \longmapsto \dfrac{1}{\sqrt{1-x}}$ *(on simplifiera les expressions)*

4) Pour $n \in \mathbb{N}$, en déduire la valeur de W_n.

Exercice 5. (2,5 points=0,5+2)

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de fonctions définie, pour $n \in \mathbb{N}$, par

$$\forall\, x \in \mathbb{R}^{+*}, \qquad f_n(x) = \frac{1}{1 + n^2 x} \cdot$$

1) Justifier la convergence simple de la série de terme général de f_n sur $\mathbb{R}^{+*}$.

On note alors $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{1 + n^2 x} \cdot$

2) Montrer que S est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^{+*}$ et exprimer S' (à l'aide d'une série).