Licence de Mathématiques.
Université d'Artois.
7 mai 2014.
Durée 3h

EXAMEN - session **1**
ANALYSE 4

Les calculatrices et les documents sont interdits.
La rédaction sera prise en compte dans la notation.

Cours-Applications. (9 points=3+1+2+3)

1) Donner les développements en série entière des fonctions suivantes et préciser le rayon de convergence.

(a) $\ln(1+x)$ (b) $\cos(x)$ (c) $\dfrac{1}{(1-x)^2}$

2) Déterminer la limites de la suite suivante (justifier au passage son existence), définie pour $n \geqslant 1$ par $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{n+k}{n^2+k^2}$.

3) Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$. On considère $F : x \in \mathbb{R} \longmapsto \displaystyle\int_1^2 f\left(\frac{t}{x^2+t}\right)\, dt$

a) Montrer que F est effectivement définie.

b) Montrer que F est $\mathscr{C}^1$. Que vaut sa dérivée ?

4) Soient I un intervalle (non trivial) et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions continues sur I : $f_n : I \to \mathbb{C}$. On suppose que cette suite converge uniformément, sur I, vers une fonction $f : I \to \mathbb{C}$.

a) Que peut-on dire de f ?

b) Démontrer ce résultat.

<u>Exercice 1.</u> (3 points=1,5+1,5)

1) On fixe un réel α. Déterminer le développement en série entière de $x \longmapsto \dfrac{x\sin(\alpha)}{1-2x\cos(\alpha)+x^2}$. (on précisera le rayon de convergence).

2) On fixe $x \in]-1,+1[$ et $b \in \mathbb{R}^+$. En intégrant par rapport à α entre 0 et b, en déduire

$$\sum_{n=1}^{+\infty} x^n \frac{\cos(nb)}{n}.$$

Exercice 2. (3 points)

Calculer

$$\iint_{\mathscr{D}} \frac{x+y}{x^2+y^2}\,dxdy$$

où

$$\mathscr{D} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \mid x+y \leqslant \sqrt{2} \quad et \quad x^2+y^2 \geqslant 1\right\}$$

Exercice 3.(4 points=1+3)

On fixe $\theta \in]0,\pi[$ et on considère la fonction 2π-périodique f qui coincide avec la fonction indicatrice de $[-\theta,\theta]$ sur $[-\pi,\pi[$ (autrement dit la fonction qui vaut 1 sur $[-\theta,\theta]$ et 0 sur $[-\pi,\pi[\backslash[-\theta,\theta]$).

1) Calculer les coefficients de Fourier de f.

2) En déduire les valeurs de

$$\sum_{n\geqslant 1} \frac{\sin(n\theta)}{n} \qquad \text{et} \qquad \sum_{n\geqslant 1} \left(\frac{\sin(n\theta)}{n}\right)^2$$

Exercice 4. (3 points=1,5+1,5)

Soient $\alpha \in \mathbb{R}$ et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions définie pour tout $x \in \mathbb{R}^+$ par

$$f_n(x) = \frac{2n^\alpha x}{1+n^2x^2}$$

1) Etudier la convergence simple de la série de terme général de f_n sur $\mathbb{R}^+$ en fonction de α.

2) Etudier la convergence normale de la série de terme général de f_n sur $\mathbb{R}^+$ en fonction de α.