Licence de Mathématiques 2012-2013.
Université d'Artois. P. Lefèvre.

EXAMEN - session **1**
ANALYSE 4
Éléments de correction

Exercice 1.

1) La fonction q est continue sur $\mathbb{R}$.

Ainsi, à $x \in \mathbb{R}$ fixé, l'application $t \in [0,1] \longmapsto xq(xt)$ est aussi continue : F est effectivement définie pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Comme l'application (que l'on appelera G) $(t,x) \in [0,1] \times \mathbb{R} \longmapsto xq(xt)$ est continue, on sait d'après le cours que la fonction F définie comme une intégrale dépendant du paramètre x est continue sur $\mathbb{R}$.

2) Pour tout $(t,x) \in [0,1] \times \mathbb{R}$, la dérivée partielle $\dfrac{\partial G}{\partial x_2}(t,x)$ existe et vaut clairement $\cos(xt)$ lorsque $t \neq 0$; et pour $t = 0$, on a $G(0,x) = x$ donc $\dfrac{\partial G}{\partial x_2}(0,x) = 1$. Ainsi la formule $\dfrac{\partial G}{\partial x_2}(t,x) = \cos(xt)$ est bien valable pour tout $(t,x) \in [0,1] \times \mathbb{R}$.

Comme $(t,x) \in [0,1] \times \mathbb{R} \longmapsto \cos(xt) = \dfrac{\partial G}{\partial x_2}(t,x)$ est continue, la fonction est dérivable (et même de classe $\mathscr{C}^1$) avec, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $F'(x) = \displaystyle\int_0^1 \cos(xt)\,dt$ donc pour $x \neq 0$, on a $F'(x) = \dfrac{\sin(x)}{x}$ et $F'(0) = 1$ (ou encore la formule pour $x \neq 0$ se prolonge par continuité).

Exercice 2.

On intègre une fonction continue sur un domaine compact du plan. On effectue la changement de variable en coordonnées polaires et on obtient

$$\mathscr{I} = \iint\limits_{\mathscr{D}} \frac{x^2 - y^2}{\left(x^2 + y^2 + 2xy + 1\right)^2}\,dxdy = \iint\limits_{\Delta} \frac{r^2\cos(2\theta)}{\left(r^2 + r^2\sin(2\theta) + 1\right)^2}\,rdrd\theta$$

avec $\Delta = [0,1] \times [0, \pi/4]$.Donc

$$\mathscr{I} = \int_0^1 \left(\int_0^{\pi/4} \frac{r^3\cos(2\theta)}{\left(r^2 + r^2\sin(2\theta) + 1\right)^2}\,d\theta \right) dr = \int_0^1 \left[\frac{-r/2}{r^2 + r^2\sin(2\theta) + 1} \right]_0^{\pi/4} dr$$

$$\mathscr{I} = \int_0^1 \left(\frac{r/2}{r^2+1} - \frac{r/2}{2r^2+1} \right) dr = \frac{1}{4}\ln(2) - \frac{1}{8}\ln(3).$$

Exercice 3.

1) Soit $a_n = \dfrac{\cos\big(2n\pi/3\big)}{n}$ pour $n \geqslant 1$.

– Si $n \equiv\ 0\ [3]$, on a $a_n = \dfrac{1}{n}\cdot$

– Si $n \equiv\ \pm 1\ [3]$, on a $a_n = -\dfrac{1}{2n}\cdot$

Ainsi $\lim\limits_{n\to+\infty} |a_n|^{1/n} = 1$ donc d'après la régle de Cauchy, le rayon de convergence est $\mathscr{R} = 1$.

2) Soit $x \in]-1,1[= \big]-\mathscr{R},\mathscr{R}\big[$. On a $f(x) = \mathscr{R}e\left(\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{j^n}{n}\, x^n\right)$. La fonction f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\big]-\mathscr{R},\mathscr{R}\big[$ et on a

$$f'(x) = \mathscr{R}e\left(\sum_{n\geqslant 1} j^n\, x^{n-1}\right) = \mathscr{R}e\left(\frac{j}{1-jx}\right) = \mathscr{R}e\left(\frac{j(1-\bar{j}x)}{|1-jx|^2}\right) = -\frac{1+2x}{2(1+x+x^2)}\cdot$$

Donc $f(x) = -\dfrac{1}{2}\ln(1+x+x^2) + f(0) = -\dfrac{1}{2}\ln(1+x+x^2)$. On obtient finalement $f(x) = -\ln\big(\sqrt{1+x+x^2}\big)$.

Exercice 4.

1) (cf T.D.) Les coefficients de Fourier de f valent : $\hat{f}(n) = \dfrac{(-1)^n \sin(\pi\theta)}{\pi(\theta-n)}$ où $n \in \mathbb{Z}$.

2) (cf TD) On applique le théorème de Dirichlet à la fonction f qui est de classe $\mathscr{C}^1$ par morceaux, en $t = \pi$. Cela donne

$$\lim_{N\to+\infty} \sum_{n=-N}^{N} \hat{f}(n)\mathrm{e}^{in\pi} = \frac{1}{2}\Big(f\big(\pi^-\big) + f\big(\pi^+\big)\Big) = \frac{1}{2}\Big(\mathrm{e}^{i\theta\pi} + \mathrm{e}^{-i\theta\pi}\Big) = \cos(\pi\theta).$$

Or

$$\sum_{n=-N}^{N} \hat{f}(n)\mathrm{e}^{in\pi} = \frac{\sin(\pi\theta)}{\pi\theta} + \sum_{n=1}^{N} \frac{\sin(\pi\theta)}{\pi(\theta-n)} + \frac{\sin(\pi\theta)}{\pi(\theta+n)} = \frac{\sin(\pi\theta)}{\pi\theta} + \sum_{n=1}^{N} \frac{2\theta\sin(\pi\theta)}{\pi(\theta^2-n^2)}$$

donc

$$\pi\mathrm{cotan}(\pi\theta) = \frac{1}{\theta} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\theta}{\theta^2-n^2}\cdot$$

3) On a, pour $n \geqslant 1$,

$$\sup\Big\{|g_n(\theta)|\,;\ \theta\in\big[-1/2,1/2\big]\Big\} = \sup_{|\theta|\leqslant 1/2} \frac{1}{n^2-\theta^2} = \frac{1}{n^2-\frac{1}{4}}$$

qui est le terme général d'une série convergente (critère de Riemann) puisque $\dfrac{1}{n^2-\frac{1}{4}} \sim \dfrac{1}{n^2}\cdot$

Ainsi la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 1} g_n$ converge normalement donc uniformément sur $\big[-1/2,1/2\big]$. De plus toutes les fonctions g_n sont continues sur $\big[-1/2,1/2\big]$ donc en 0. Donc G est continue en 0.

On note que $G(0) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$.

D'autre part, daprès la question 2., on a pour tout $\theta \in \big[-1/2,1/2\big]\setminus\{0\}$:

$$G(\theta) = \frac{1}{2\theta}\Big(\frac{1}{\theta} - \pi\text{cotan}(\pi\theta)\Big) = \frac{\pi^2}{2\pi\theta}\Big(\frac{1}{\pi\theta} - \text{cotan}(\pi\theta)\Big)$$

En passant à la limite vers 0 (en θ), on obtient :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = G(0) = \lim_{x\to 0} \frac{\pi^2}{2x}\Big(\frac{1}{x} - \text{cotan}(x)\Big) = \lim_{x\to 0} \frac{\pi^2}{2} \cdot \frac{\sin(x) - x\cos(x)}{x^2\sin(x)}.$$

On a $x^2\sin(x) \sim x^3$ au voisinage de 0 et

$$\sin(x) - x\cos(x) = \Big(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\Big) - x\Big(1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)\Big) = \frac{x^3}{3} + o(x^3)$$

donc $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2\sin(x)}\big(\sin(x) - x\cos(x)\big) = \frac{1}{3}$ et

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

a) Pour tout $n \geqslant 1$, g_n est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\big[-1/2,1/2\big]$ et pour tout $\theta \in \big[-1/2,1/2\big]$, on a

$$g_n'(\theta) = \frac{2\theta}{(n^2-\theta^2)^2}.$$

On constate alors que

$$\sup\big\{|g_n'(\theta)|\,;\ \theta \in \big[-1/2,1/2\big]\big\} = \sup_{|\theta|\leqslant 1/2} \frac{2|\theta|}{(n^2-\theta^2)^2} = \frac{1}{\big(n^2 - \frac{1}{4}\big)^2}$$

qui est le terme général d'une série convergente puisque $\frac{1}{\big(n^2 - \frac{1}{4}\big)^2} \sim \frac{1}{n^4}$.

Ainsi la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 1} g_n'$ converge normalement donc uniformément sur $\big[-1/2,1/2\big]$. De plus toutes les fonctions g_n sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\big[-1/2,1/2\big]$. Enfin il y a convergence simple en moins un point de la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 1} g_n$ (on a même fait bien mieux dans les questions précédentes). Donc G est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\big[-1/2,1/2\big]$. De plus, pour tout $\theta \in \big[-1/2,1/2\big]$,

$$G'(\theta) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\theta}{(n^2-\theta^2)^2}.$$