Licence de Mathématiques.
Université d'Artois.
15/05/2013.
Durée 3h

EXAMEN - session **1**
ANALYSE 4

Les calculatrices et les documents sont interdits.
La rédaction sera prise en compte dans la notation.

Cours-Applications. (3.5 points=2+1.5)

1) Soit $\alpha \in \mathbb{R}^{+*}$. Donner les développements en série entière des fonctions suivantes et préciser le rayon de convergence.

(a) $\ln(1+x)$ (b) $\cos(x)$ (c) $\dfrac{1}{\alpha - x}$

2) Énoncer le théorème de Parseval.

Exercice 1. (3.5 points=1.5+2)

On définit la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $q(u) = \dfrac{\sin(u)}{u}$ pour $u \in \mathbb{R}^*$ et $q(0) = 1$.
Soit $F(x) = \displaystyle\int_0^1 xq(xt)\,dt = \int_0^1 \frac{\sin(xt)}{t}\,dt$ où $x \in \mathbb{R}$.

1) Justifier que F est effectivement définie sur $\mathbb{R}$ et que F est continue.

2) Montrer que F est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer sa dérivée.

Exercice 2. (2,5 points)

Calculer

$$\iint_{\mathscr{D}} \frac{x^2 - y^2}{\big(x^2 + y^2 + 2xy + 1\big)^2}\,dxdy \;\text{ où } \mathscr{D} = \Big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geqslant y \geqslant 0 \quad \textit{et} \quad x^2 + y^2 \leqslant 1\Big\}.$$

Exercice 3.(4 points=1+(0.5+2.5))

Dans cet exercice, on pourra utiliser $j = \mathrm{e}^{2i\pi/3}$.

1) Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{\cos\big(2n\pi/3\big)}{n}\, x^n$.

On note $f(x)$ sa somme.

2) Soit $x \in]-1, 1[$.

a) Pour $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < 1$, rappeler la valeur de $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} z^n$.

b) En déduire une expression simplifiée de $f'(x)$, puis que $f(x) = -\ln\big(\sqrt{1 + x + x^2}\big)$.

Exercice 4. (8.5 points=1+2.5+(1.5+0.5+1.5+1.5))

La question 3. peut être abordée en utilisant directement le résultat de la question 2.

Soient $\theta \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{Z}$ et $f(t) = \exp(i\theta t)$ pour $t \in [-\pi, \pi[$, prolongée par 2π-périodicité.

1) Calculer les coefficients de Fourier de f.

2) En déduire que $\displaystyle\pi\mathrm{cotan}(\pi\theta) = \frac{1}{\theta} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\theta}{\theta^2 - n^2}$.

3) On note $\displaystyle g_n(\theta) = \frac{1}{n^2 - \theta^2}$ pour $n \geqslant 1$ et $\theta \in \big[-1/2, 1/2\big]$.

a) Montrer que la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} g_n$ converge normalement sur $\big[-1/2, 1/2\big]$.

On note G la somme de cette série de fonctions.

b) Justifier que G est continue en 0.

c) En déduire que $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

d) Montrer que G est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\big[-1/2, 1/2\big]$ et donner une expression de $G'(\theta)$.