

## Examen - éléments de correction - Session 1

### ANALYSE 1

#### Exercice 1 (cf TD)

Soient  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  avec  $\alpha < \beta$ . Soit  $f : [\alpha, \beta] \rightarrow [\alpha, \beta]$  continue.

La fonction  $\Delta : x \in [\alpha, \beta] \mapsto x - f(x) \in \mathbb{R}$  est continue.

On remarque que  $\Delta(\alpha) = \alpha - f(\alpha) \leq 0$  puisque  $f(\alpha) \geq \alpha$  par définition. Puisque  $f(\beta) \leq \beta$ , on constate aussi que  $\Delta(\beta) \geq 0$ .

Ainsi  $0 \in [\Delta(\alpha), \Delta(\beta)]$  et  $\Delta$  est continue sur l'intervalle  $[\alpha, \beta]$ , donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe  $c \in [\alpha, \beta]$  tel que  $\Delta(c) = 0$ .

Ceci signifie que  $f(c) = c$ .

#### Exercice 2

1) Cours.

2) (i) cf TD (ici  $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$  puisque  $f$  surjective).

(ii) On choisit  $f(x) = x^3$  qui est continue surjective de  $\mathbb{R}$  sur  $\mathbb{R}$ . Comme  $\mathbb{Q}$  est dense dans  $\mathbb{R}$  (cf 1.) , la question précédente donne le résultat.

#### Exercice 3 (cf cours)