Licence Math-Info.
Université d'Artois. 2020-2021.

Examen - Session 1
ANALYSE 1

Les calculatrices et les documents sont interdits.
La rédaction sera prise en compte dans la notation.

<u>Cours</u> (11 points)

1) Soit $E \subset \mathbb{R}$. Définition de " E est dense dans $\mathbb{R}$ ":

2) a) Ecrire la définition de $\left(u_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ.

b) Soit $\left(x_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels convergente vers ℓ. Montrer que toute sous-suite converge aussi vers ℓ.

3) a) Donner la définition d'une suite de Cauchy.

b) Montrer que toute suite convergente est une suite de Cauchy.

c) Quel résultat remarquable a-t-on à propos des suites de Cauchy de réels ? [1]

4) Montrer que toute suite croissante majorée converge.

5) Enoncer le théorème de Bolzano-Weierstrass.

6) Soient K un segment et $f : K \to \mathbb{R}$ une application.

a) Ecrire avec des quantificateurs ce que signifie f continue en tout point de K.

b) Ecrire avec des quantificateurs ce que signifie f uniformément continue.

c) Ecrire la négation de "f uniformément continue".

d) Enoncer le théorème de Heine.

e) Montrer ce résultat.

<u>Exercice 1</u> (2 points)

Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ avec $\alpha < \beta$. Soit $f : [\alpha, \beta] \to [\alpha, \beta]$ continue. Montrer qu'il existe $c \in [\alpha, \beta]$ tel que $f(c) = c$.

Indication: considérer $\Delta(x) = x - f(x)$.

[1] Pas de preuve demandée

<u>Exercice 2</u> (5 points

1) On veut démontrer le résultat du cours : $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$. On admet qu'il suffit de montrer que dans tout intervalle $[a, b]$ où $0 < a < b$, on peut trouver un rationnel. On se donne donc un tel intervalle.

a) Justifier qu'il existe un entier $q \geqslant 1$ tel que $\dfrac{1}{q} < b - a$.

b) Justifier que $p = \min\left\{k \in \mathbb{N} \,\middle|\, k \geqslant aq\right\}$ existe et que $p \geqslant 1$.

c) Conclure que $\dfrac{p}{q} \in [a, b]$.

2) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue surjective.

(i) On considère D une partie dense dans $\mathbb{R}$. Montrer que $f(D) = \{f(x) \mid x \in D\}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

(ii) Montrer que $\left\{\dfrac{p^3}{q^3} \mid p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0\right\}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

<u>Exercice 3</u> (3 points)

On veut démontrer "Cesàro": soit $\left(x_n\right)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de réels qui converge vers ℓ.
On considère la suite définie par

$$\gamma_n = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} x_k \quad , \text{ où } n \in \mathbb{N}.$$

On veut montrer que $\left(\gamma_n\right)_{n \in \mathbb{N}}$ converge aussi vers ℓ. On se donne $\varepsilon > 0$.
1) Montrer qu'il existe un entier $n_0 \geqslant 1$ tel que pour $n \geqslant n_0$, on a

$$\left|\gamma_n - \ell\right| \leqslant \frac{1}{n+1} \left(\sum_{k=0}^{n_0 - 1} |x_k - \ell| \right) + \varepsilon \, .$$

2) Conclure.