HABILITATION À DIRIGER DES RECHERCHES

Spécialité MATHÉMATIQUES

Pascal LEFÈVRE

Université d'Artois

Ensembles minces en analyse harmonique, Compacité faible et Opérateurs de composition

Thèse soutenue le 13 Décembre 2006 devant le jury composé de:

Catalin BADEA, Université Lille 1
Catherine FINET, Université de Mons
Gilles GODEFROY, Université Paris VI (Rapporteur)
Hans JARCHOW, Université de Zürich (Rapporteur)
Nigel KALTON, Université Missouri Colombia(Rapporteur)
Daniel LI, Université d'Artois
Gilles PISIER, Université Paris VI et Texas A&M
Florian VASILESCU, Université Lille 1

Je remercie Gilles Godefroy et Hans Jarchow pour les conseils bienveillants dont ils m'ont fait part au cours de ces années, depuis notre rencontre en République Tchèque. Ils ont accepté, avec Nigel Kalton, la charge de rapporteur. Je suis très honoré que de telles personnalités se soient intéressées à mon travail.

Je remercie sincèrement chacun des membres du jury pour sa participation. Une partie des travaux de Gilles Pisier a influencé ma recherche. Outre le fait qu'il soit un éminent mathématicien, il a su se montrer disponible et j'ai pu bénéficier de ses conseils. J'ai pu apprécier les qualités scientifiques de Catalin Badea et de Florian Vasilescu, que ce soit lors du séminaire à Lille ou de nos séances de groupe de travail. Depuis quelques années, l'axe Lens-Lille-Mons s'est développé et Catherine Finet nous fait le plaisir d'enrichir notre groupe malgré ses multiples responsabilités.

Une partie de mon travail est le fruit d'une collaboration avec Daniel Li, Hervé Queffélec et Luis Rodríguez-Piazza. Leurs qualités scientifiques et humaines ont permis de créer une atmosphère privilégiée pour notre recherche. Je leur exprime mon estime et mon amitié. J'avais déjà pu apprécier Hervé lorsque j'étais doctorant. J'ai le plaisir de travailler avec Daniel à Lens et je peux ainsi profiter de son expérience. Je suis très reconnaissant envers Luis. Grâce à lui et à l'accueil que j'ai reçu au sein du Departamento de Análisis Matemático, mes voyages à Séville ont toujours été productifs et enrichissants.

Je tiens à saluer amicalement mes collègues de Lens: j'ai la chance de travailler avec eux depuis huit ans dans une ambiance particulièrement chaleureuse.

Mes filles Anna et Aleksandra ont participé, à leur façon, à ma recherche. Anna[1] m'a aidé à réaliser les efforts de communication que les mathématiciens ont encore à faire, en m'expliquant gentiment qu'elle voulait être plus tard une vraie scientifique, elle. Une partie des résultats de [6] a été établie en berçant Aleksandra. Je les embrasse affectueusement.

[1] 6 ans à l'époque

Contents

Présentation des travaux

Dans cette rédaction, nous présentons un aperçu de nos travaux. Nous rappellerons quelques unes des notions usuelles de géométrie des Banach, pour les autres nous renvoyons à [LQ] ou [P3].

On peut dégager trois thèmes majeurs: les ensembles minces en analyse harmonique, la compacité faible des opérateurs et les opérateurs de composition. Le dénominateur commun de ces travaux est la géométrie des espaces de Banach: elle est tantôt un outil pour l'étude des ensembles lacunaires ou des opérateurs, tantôt les ensembles minces sont utiles pour exhiber de nouveaux exemples d'espaces ou illustrer certaines propriétés. L'usage de la faible compacité peut être vu comme un fil conducteur entre deux thèmes a priori relativement éloignés comme "Ensembles minces" et "Opérateurs de composition". Il ne s'agit que d'un outil (parmi tant d'autres) commun aux travaux sur ces deux thématiques, mais qui a motivé une partie de la recherche axée exclusivement sur ce sujet: l'étude de la compacité faible des opérateurs a son intérêt propre. On trouve dans la littérature diverses caractérisations des opérateurs faiblement compact à image dans un Banach arbitraire. Bien sûr, elles sont intimement liées à la géométrie du domaine.

1 Ensembles minces

1.1 Généralités

L'étude générale des ensembles lacunaires initiée à la moitié du vingtième siècle a connu un essor particulier dans les années 1970-80. Pour avoir un aperçu quasi-exhaustif sur l'évolution du domaine jusqu'en 1983, la référence est la thèse d'état de Déchamps-Gondim [DG2]. On pourra aussi consulter l'ouvrage [LQ] pour des exposés complémentaires avec des résultats plus récents.

Nos premiers travaux concernaient les ensembles stationnaires, introduits par Pisier dans [P1]. Les méthodes développées pour les étudier, notamment via la géométrie des espaces de Banach, s'adaptent en fait à d'autres classes comme les ensembles p-Sidon (ℓ^p et C^{ps} sont de cotype 2, quand $p \in [1, 2]$).

En utilisant une généralisation des polynômes de Rudin-Shapiro, on démontre que les ensembles stationnaires ne contiennent pas de parallélépipèdes de taille arbitrairement grande [14]. D'après un résultat de Miheev [M], ceci implique qu'un ensemble stationnaire d'entiers positifs $\{\lambda_n\}$ vérifie $\lambda_n \geq cn^s$ pour un certain $s > 1$. En particulier, les nombres premiers ne forment pas un ensemble stationnaire. La question est toujours ouverte pour les carrés. On ne sait pas construire un substitut des polynômes de Rudin-Shapiro à spectre dans les carrés. S'il était possible de trouver des choix de signe $\varepsilon_{j,n} \in \{\pm 1\}$ tels que $\| \sum_{1\le j\le n} \varepsilon_{j,n} e_{j^2} \|_\infty = o(\sqrt{n\log(n)})$, cela suffirait pour conclure que les carrés ne sont pas stationnaires.

Le point de vue probabiliste, sous-jacent au concept d'ensemble stationnaire, ne peut être remplacé par le point de vue topologique si on veut garder la même notion. Substituer le point de vue topologique au point de vue probabiliste redonne la notion d'ensemble de Sidon. Ce fait est un corollaire du théorème suivant qui donne un critère de convergence inconditionnelle (voir [12]).

Théorème 1.1 *Soit X un espace de Banach. Soit une suite $(x_n)_{n\ge 0}$ d'éléments de X. On définit*

$$\Omega_1 = \{\alpha \in \{-1,1\}^{\mathbb{N}};\ \sum_{n\ge 0} r_n(\alpha) x_n \text{ converge dans } X\}.$$

Alors, Ω_1 est maigre ou $\sum_{n\ge 0} x_n$ converge inconditionnellement dans X.

Les ensembles p-Sidon évoqués précédemment ont été bien étudiés dans les années 70. Une généralisation de cette classe d'ensemble, nommés à l'origine p-Sidon p.s., a été introduite et caractérisée (dans l'esprit des travaux de Pisier et Bourgain sur les Sidon) par Rodríguez-Piazza. Désormais ces ensembles sont appelés p-Rider. Leur étude est abordée à nouveau dans [10]. On y montre notamment que pour $p \in (1, 4/3]$, un ensemble E est p-Rider si et seulement si les séries de Fourier aléatoires *p.s.* continues, à spectre dans E, s'envoient dans l'espace d'Orlicz associé à la fonction $\psi_r(x) = \exp(x^r) - 1$, où $r = (2-p)/(p-1)$ (le cas dégénéré $p = 1$ correspond bien sûr au théorème de Rider). Le lien entre p-Sidon et p-Rider est encore mal connu pour $p > 1$. Il est facile de vérifier que p-Sidon implique p-Rider mais c'est la réciproque qui pose problème. Toutefois, on montre dans [9] que tout ensemble p-Rider, avec $p < 4/3$ est q-Sidon pour tout $q > p/(2-p)$. Les techniques utilisées permettent aussi d'obtenir des informations sur les mesures à spectre dans un p-Rider (pour tout $p < 2$). On obtient ainsi que la suite des coefficients de Fourier de telles mesures appartient à ℓ^α pour tout $\alpha > 2p/(2-p)$. Bien sûr, cela est insuffisant pour conclure si un tel ensemble est $\Lambda(s)$ pour un certain s, même quand p est (arbitrairement) proche de 1.

1.2 Stabilité par réunion et nouveaux exemples

Nous nous sommes intéressés au problème de la stabilité par réunion pour diverses classes d'ensembles minces. Nous l'avons abordé sous plusieurs angles et exhibé de nouveaux exemples: c'est aussi lié à l'étude des connections entre les différentes classes d'ensembles lacunaires. En fait, bien que les exemples "pratiques" soient des ensembles d'entiers, les résultats dépassent le cadre des ensembles d'entiers et sont souvent valables dans les duaux de groupes compacts abéliens.

Pour revenir aux ensembles p-Sidon et p-Rider. Il est clair que la classe des ensembles p-Rider est stable par union: c'est dû à l'inconditionalité des caractères dans l'espace C^{ps}. Le problème sur l'union des ensembles p-Sidon est toujours ouvert pour $p \in]1,2[$ et il serait évidemment résolu si on montrait que les classes d'ensembles p-Rider et p-Sidon coïncident. Toutefois, nous avons un résultat partiel: les résultats annoncés plus haut impliquent que la classe des ensembles qui sont p-Sidon pour tout $p > 1$ est stable par réunion.

Les autres résultats obtenus concernent principalement les ensembles LP et les ensembles de Riesz.

A l'origine, les ensembles LP sont dénommés ensembles ergodiques et apparaissent dans les travaux de Lust-Piquard [Lu1] sur les moyennes invariantes. Afin d'éviter la confusion avec les ensembles ergodiques de Bourgain, ils ont été renommés ensembles LP (ensembles de Lust-Piquard) dans [8], car c'est elle qui a initialisé la recherche sur ces ensembles. Le lien avec les ensembles de Rosenthal est naturel: tout ensemble de Rosenthal est LP et une réponse négative à la réciproque n'a été apportée qu'à la fin des années 80 dans [Lu2], où Lust-Piquard montre que les nombres premiers congrus à 2 modulo 5 forment un ensemble LP, pour lequel le sous-espace de $C(\mathbb{T})$ engendré contient des copies de c_0 et donc ne peut être un Rosenthal (on exhibe un autre exemple dans [8]). savoir si les nombres premiers eux-mêmes forment un ensemble LP est resté un problème ouvert jusque récemment. La réponse est positive et on a en fait un résultat plus fort: sa réunion avec n'importe quel ensemble LP est encore LP [1]. Ceci résulte d'un théorème qui généralise le principe de localisation que l'on applique usuellement: pour qu'un ensemble soit LP, il (faut et il) suffit qu'il le soit localement (au sens de la topologie de Bohr) sur le groupe dual, sauf peut-être sur un ensemble dont on sait déja qu'il est LP (Th.1 de [1]). En appliquant ce principe dans deux situations opposées (l'ensemble éludé peut être large ou étroit), on obtient:

Théorème 1.2 *1) La réunion de deux ensembles LP est un ensemble LP dès qu'un de ces ensembles est fermé pour la topologie de Bohr.*

2) Soit $\Lambda = E \cup E'$ un ensemble fermé pour la topologie de Bohr. On suppose que E est LP et que E' est discret pour la topologie induite sur Λ. Alors Λ est un ensemble LP.

On ne sait pas si la réunion de deux ensembles LP est toujours LP.

Il y a un lien entre ce qui précède et les ensembles de Riesz, à plusieurs niveaux. D'abord, le point 1. du théorème précédent évoque les résultats de Meyer [Me] sur la réunion d'un Riesz et d'un Riesz fort. D'autre part, sur le lien entre les classes: on a dit que Rosenthal implique LP (facile), sans être équivalent, et on sait que Rosenthal implique Riesz. La relation entre LP et Riesz a été précisé par Li [Li1] qui a montré que tout ensemble LP est un ensemble de Riesz. On savait déjà que la réciproque est fausse car Katznelson a montré que $\mathbb{N}$ n'est pas LP (voir [RS]). En fait, on peut retrouver conjointement ces deux résultats comme conséquence du théorème suivant [5]

Théorème 1.3 *La réunion d'un ensemble LP et d'un ensemble de Riesz est un ensemble de Riesz.*

Ceci généralise aussi un théorème de Dressler et Pigno [DP] affirmant que la réunion d'un Rosenthal et d'un Riesz est Riesz. Il est d'ailleurs naturel de se demander si ce résultat n'était pas déjà une conséquence des travaux antérieurs de Meyer. Autrement dit est-ce que tout Rosenthal ne serait pas Riesz fort (i.e. sa fermeture pour la topologie de Bohr est Riesz) ? En fait la réponse est négative car on construit dans [5] un ensemble de Rosenthal qui est dense. La construction généralise l'exemple fondateur de Rosenthal [Ro], pour lequel 0 est un point d'accumulation. Elle s'inspire aussi d'une construction de Kunen et Rudin [KR] qui construisent un ensemble $\Lambda(p)$ (pour tout p) d'entiers dense (en fait, déjà établi par Katznelson [Ka] par d'autres techniques). Ce résultat a été largement généralisé par Li-Queffélec-Rodríguez-Piazza [LQR], nous y reviendrons. Signalons que dans la preuve du théorème 1.3, nous avons été amenés à la généralisation suivante du Th. de Bishop-Carleson-Rudin sur les ensembles de Riesz, qui semble nouvelle, même dans le cadre classique des fonctions analytiques (i.e. $E^c = \mathbb{N}$):

Théorème 1.4 *Soit G un groupe abélien compact et $E \subset \Gamma = \hat{G}$. Les assertions suivantes sont équivalentes:*

i) E est un ensemble de Riesz

ii) Pour tout couple (K, L) de compacts disjoints inclus dans G avec $m(K) = 0$, tout $\eta > 0$ et toutes fonctions $f \in \mathcal{C}_{E^c}(G)$, et $h \in \mathcal{C}(K)$ avec $\|f\|_\infty < 1$, et $\|h\|_\infty < 1$,

il existe $g \in \mathcal{C}_{E^c}(G)$, avec $\|g\|_\infty < 1$, vérifiant: $|g(x) - f(x)| < \eta$, pour tout $x \in L$ et $g(x) = h(x)$, pour tout $x \in K$.

Exhiber de nouveaux ensembles de Riesz passe souvent par des résultats de stabilité par réunion. Signalons à ce propos le problème proposé par Rudin dans son article fondateur [Ru]: trouver les parties E de $\mathbb{N}$ telles que $\mathbb{Z}^- \cup E$ soit un ensemble de Riesz. Il a lui-même remarqué qu'un ensemble $\Lambda(1)$ en fournit un exemple. Rappelons que ce problème est motivé d'une part par le fait que la réunion de deux Riesz n'est pas Riesz en général et le Th. de Riesz affirmant que $\mathbb{N}$ l'est (donc $\mathbb{Z}^-$ aussi). Nous avons déjà parlé des résultats de Meyer sur les Riesz forts, avec comme conséquence que l'union des entiers négatifs avec les carrés ou les nombres premiers est Riesz. La théorie des ensembles de Riesz a été renouvelée avec les travaux de Godefroy sur les ensembles bien disposés [Go]. Il retrouve aussi les exemples de Rudin et Meyer. D'autres exemples ont été exhibés dans [13] puis [7] où on s'intéresse à la réunion avec des ensembles Λ tels que $c_0 \not\subset C_\Lambda(G)$ ou $c_0 \not\subset L^\infty_\Lambda(G)$. Fournier et Pigno avaient montré dans [FP] que certaines classes usuelles d'ensembles minces d'entiers ont la propriété que leur union avec les entiers négatifs est un ensemble de continuité. Nous avons établi ce résultat pour les ensembles stationnaires, en étudiant les mesures à spectre dans de tels ensembles. Toutefois, on peut aussi retrouver ce résultat comme conséquence des travaux de Hare [H] où elle montre en particulier que $\mathbb{Z}^- \cup E$ est un ensemble de continuité dès que E ne contient pas de parallélépipèdes arbitrairement grands (ce que l'on a pour les stationnaires).

La technique probabiliste pour exhiber de nouveaux ensembles n'est pas nouvelle. Elle consiste à sélectionner aléatoirement des ensembles d'entiers (voir [LQ] pour en savoir plus sur la méthode des sélecteurs). Bourgain [Bo4] l'a utilisée de façon spectaculaire pour montrer l'existence de vrais $\Lambda(p)$, pour $p > 2$ (résultat retrouvé par Talagrand avec ses techniques de mesures majorantes dans [T]). Plus récemment, Li-Queffélec-Rodríguez Piazza [LQR] construisent aussi aléatoirement des ensembles minces $\Lambda(p)$ pour tout p, q-Sidon pour tout $q > 1$, UC mais aussi uniformément distribués donc Bohr denses et engendrant un c_0 dans $C(\mathbb{T})$. Ces ensembles sont a fortiori non Rosenthal. Cette construction renforce un résultat de Li [Li2]. Dans [1], on montre qu'en plus on peut construire de tels ensembles pour que, presque sûrement, ils ne soient pas LP. Neuwirth [Ne] a montré que la construction de Li d'ensembles $\Lambda(p)$ non Rosenthal, peut se faire dans certains ensembles d'entiers tels que les nombres premiers ou les carrés. Toutefois, ce point ne peut pas s'adapter pour construire de tels ensembles non LP. Si c'était le cas, cela impliquerait que l'ensemble des nombres premiers n'est pas LP (ce qui est faux).

1.3 Ensembles minces et géométrie des espaces de Banach

Divers résultats ou caractérisations d'ensembles minces s'expriment par des propriétés géométriques d'un espace invariant par translation naturellement associé. Citons par exemple le Théorème de Bourgain-Milman [BM] affirmant qu'un ensemble S est Sidon si et seulement si $C_S(G)$ a un cotype fini. Nous avons déjà évoqué le fait que $c_0 \not\subset C_\Lambda(G)$ implique que Λ est Riesz (réciproque fausse), ou est entrainé par Λ Rosenthal (réciproque ouverte). On peut aussi signaler cette conséquence du Théorème de Rosenthal sur les sous-espaces réflexifs de L^1: E est un ensemble $\Lambda(1)$ si et seulement si $L^1_E(G)$ est réflexif.

Dans l'esprit du théorème de Bourgain-Milman, on peut se poser une question similaire pour les sous-espaces invariants par translation de U (cf 2.) ou de l'espace d'Orlicz gaussien L^{ψ_2}, ou encore pour d'autres espaces d'Orlicz. En ce qui concerne U, nous avions montré que la situation était la même que pour $C(\mathbb{T})$: U_Λ est de cotype fini si et seulement si Λ est Sidon [10]. La preuve suivait l'argument de [BM]. En fait, on a remarqué dans [8]: dès que Λ n'est pas un ensemble UC, U_Λ contient une copie de c_0. Ainsi si U_Λ est de cotype fini, $C_\Lambda(\mathbb{T}) = U_\Lambda$ est de cotype fini et le Théorème de Bourgain-Milman donne la conclusion. Un résultat similaire existe pour les espaces d'Orlicz, quand ψ satisfait une condition de croissance appelée Δ^0, qui nie fortement la condition Δ_2:

Théorème 1.5 *Soit X_0 un sous-espace vectoriel de $L^\infty(\Omega, \mathbb{P})$ sur lequel les normes $\|.\|_2$ et $\|.\|_\psi$ ne sont pas équivalentes. On suppose que ψ satisfait Δ^0.*

Alors il existe une suite dans X_0 qui engendre un sous-espace isomorphe à c_0 dans $L^\psi(\Omega, \mathbb{P})$.

En fait, en adaptant les techniques utilisées pour la preuve, on peut donner une version opérateur plus générale (voir 3.3.2). On en déduit immédiatement la dichotomie suivante

Théorème 1.6 *Soit Λ une partie du dual d'un groupe abélien compact G. On suppose que ψ satisfait Δ^0.*

Ou bien $L^\psi_\Lambda(G) = L^2_\Lambda(G)$, ou bien $L^\psi_\Lambda(G)$ contient un sous-espace isomorphe à c_0.

En particulier, dans le cas gaussien, on obtient grâce au théorème de Pisier [P1]: ou bien Λ est Sidon, ou bien $L^{\psi_2}_\Lambda(G)$ contient un sous-espace isomorphe à c_0. D'autre part, une conclusion du même type sur Λ existe pour des fonctions ψ générales (voir [10]).

Dans [4], on s'intéresse notamment aux sous-espaces $C_\Lambda(\mathbb{T})$ et U_Λ ayant une structure locale inconditionnelle. Evidemment si Λ est Sidon, ces espaces sont isomorphes à ℓ^1 et ils ont une base inconditionnelle. On sait depuis longtemps que la réciproque n'est pas vraie pour un groupe quelconque: on peut construire une partie Λ du groupe de Walsh (dual du groupe de Cantor Ω_0) tel que $C_\Lambda(\Omega_0)$ ait une base inconditionnelle et Λ n'est pas Sidon [KP]. Un tel exemple n'a toujours pas été exhibé dans le cadre classique du tore. D'autre part, Pisier [P2] montre que, sauf cas trivial (être Sidon), cela ne peut se produire pour des ensembles trop lacunaires: dès que S est $\Lambda(2)$, une structure inconditionnelle pour $C_S(G)$ impose que S est Sidon. Dans [4], on obtient divers résultats qui généralisent ceci, avec leur équivalent dans U_Λ. On se concentre sur le cas du tore et des parties Λ incluses dans $\mathbb{N}$. Le problème suivant reste ouvert pour de telles parties: est-ce que Λ est Sidon dès que $C_\Lambda(\mathbb{T})$ a une structure locale inconditionnelle ? Le problème est ouvert, même sous l'hypothèse plus forte de l'existence d'une base inconditionnelle. Une autre question reste ouverte sur les Sidon sur ce type de probématique: est-ce que $C_{S^c}(G)$ a une structure locale inconditionnelle quand S est Sidon (infini) ? En fait, curieusement, on ne sait rien. Sur aucun exemple, on a une réponse positive ou négative. Dès que S a une hypothèse supplémentaire de lacunarité (disons $\Lambda(1)$) et non Sidon, la réponse est négative en général. Ce type de problème est étudié dans [11] car tout ceci est lié aux ensembles quasi-Cohen. Les techniques reposent sur la réponse au problème naturel suivant: quand est-ce que l'identité formelle du quotient $C(G)/C_\Lambda(G)$ dans $L^2(G)$ est 2-sommante ? Il se trouve que cela se produit exactement quand le complémentaire de Λ est quasi-Cohen. On a en fait la caractérisation suivante

Théorème 1.7 *Soit E une partie du dual d'un groupe abélien compact G. Les assertions suivantes sont équivalentes*

i) *E est un ensemble quasi-Cohen.*
ii) *L'injection canonique de $C_E(G)$ dans $L^1_E(G)$ se factorise par l'injection canonique de $L^2(G) \to L^1(G)$.*
iii) *Il existe un Banach X et un opérateur 2-sommant $T : C(G)/C_{E^c}(G) \to X$ tels que $\inf_{\gamma \in E} \|T(\dot{\gamma})\|_X > 0$.*

Ainsi, si $C_\Lambda(G)$ a la propriété de Gordon-Lewis et que le quotient $M(G)/M_{\Lambda^c}(G)$ est de cotype 2 alors Λ est un ensemble quasi-Cohen. Ceci est lié à une autre question: est-ce que le quotient $L^1(G)/L^1_S(G)$ est isomorphe à un sous-espace de L^1 quand S est Sidon ? Des éléments de réponse sont apportés dans [11] mais le problème reste ouvert. A noter la preuve, légèrement antérieure, de Kalton et Pełczyński [K-P] que l'espace $L^1_{S^c}(G)$ ne vérifie pas le Théorème de Grothendieck. Ainsi, par dualité, il existe des opérateurs de $L^\infty(G)/L^\infty_S(G)$ dans un espace L^1 non 2-sommants. Il faut considérer des opérateurs non invariants par translation (on voit très facilement que tout opérateur de convolution de $L^1_{S^c}(G)$ dans L^2 est absolument sommant) et on peut imaginer que dans les problèmes précédents, il faille distinguer le cas des opérateurs de convolution des autres.

2 Espaces de séries de Fourier uniformément convergentes

2.1 Généralités

Rappelons que l'espace U des séries de Fourier uniformément convergentes est l'espace des fonctions continues f sur le tore dont les sommes partielles $S_N(f)$ convergent uniformément vers f. On note $S_N(f) = \sum_{|n| \le N} \hat{f}(n) e_n$, avec $e_n(t) = \mathrm{e}^{2i\pi nt}$.

L'espace U^+ est l'espace des séries de Taylor uniformément convergentes. Autrement dit $U^+ = U \cap A(\mathbb{D})$.

L'espace des séries de Fourier uniformément convergentes a déjà fait l'objet de nombreux travaux. Toutefois, son étude du point de vue de la géométrie des Banach est partielle. De nombreuses questions naturelles restent ouvertes. On sait depuis longtemps que U et U^+ ne sont pas isomorphes à $C(\mathbb{T})$. Bourgain a démontré que l'algèbre du disque n'admet pas de base besselienne [Bo1]. Ceci implique que U et U^+ ne sont pas isomorphes à $A(\mathbb{D})$. De façon surprenante, la question de savoir si U et U^+ ne sont pas isomorphes entre eux a été ignorée. On répond négativement à la question dans [4]. C'est une conséquence du théorème suivant

Théorème 2.1 *Tout opérateur 1-sommant de U dans un espace K-convexe est compact.*

En effet, cette propriété de U est clairement stable par isomorphisme. Or la projection de Paley de U^+ dans l'espace de Hilbert ℓ^2 est 1-sommante et non compacte.

2.2 Espaces U, U^+ et leurs sous-espaces

Nous avons déjà évoqué l'étude des sous-espaces invariants de U, à spectre lacunaire, en terme de structure inconditionnelle. Mais qu'en est-il pour les espaces U et U^+ eux-mêmes? Il est bien connu que l'espace des fonctions continues $C([0,1])$ a une telle structure et que l'algèbre du disque n'en a pas ($A(\mathbb{D})$ n'a pas non plus la propriété de Gordon-Lewis). On montre facilement que le même argument fonctionne pour U^+: l'espace U^+ n'a pas la propriété de Gordon-Lewis. Pour l'espace U, c'est plus délicat mais on montre qu'à ce niveau, sa nature se rapproche de celle de $A(\mathbb{D})$ plutôt que de celle de $C([0,1])$. Ces résultats sont quantifiés dans [4]:

Théorème 2.2 *Il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout entier $N \geq 1$:*
i) $gl(U_{[0,N]}) \geq C\sqrt{\log(N)}$.
ii) $gl(U_{[-N,N]}) \geq C\sqrt{\log(N)}$.

On rappelle que la constante de Gordon-Lewis $gl(X)$ d'un Banach (ayant cette propriété) est la borne supérieure de tous les ratio $\dfrac{\gamma_1(T)}{\pi_1(T)}$ sur les opérateurs 1-sommants T (bornés de X dans un Banach Y). $\gamma_1(T)$ est la constante de factorisation de T par un espace L^1 et $\pi_1(T)$ est la norme 1-sommante de T.

Notons que le point (ii) implique bien que l'espace U n'a pas la propriété de Gordon-Lewis. Celle-ci ne passe pas a priori au sous-espace mais passe bien aux sous-espaces complémentés. Or $U_{[-N,N]}$ est 1-complémenté dans U, par la convolution par le noyau de Dirichlet. On ne sait pas si ces inégalités sont optimales.

Évidemment, tout ceci implique que ni U ni U^+ n'ont de base inconditionnelle. On sait par ailleurs que lorsque qu'un espace de Banach vérifie l'identité de Daugavet, cela lui interdit l'existence de base inconditionnelle. Ainsi, on peut se demander si U et U^+ ont la propriété de Daugavet. Rappelons que cela signifie que tout opérateur $T : X \to X$ de rang 1 (c'est alors vrai pour tout opérateur faiblement compact) vérifie l'identité $\|I - T\| = 1 + \|T\|$. Beaucoup d'espaces partagent cette propriété: $C([0,1])$, $A(\mathbb{D})$, $L^1([0,1])$,...(voir [KSSW] par exemple). Mais

Théorème 2.3 *U et U^+ n'ont pas la propriété de Daugavet.*

Pour prouver ce théorème [4], le premier réflexe est de s'intéresser à l'opérateur de convolution par le noyau de Dirichlet (i.e. l'opérateur S_n qui à f associe sa $n^{\text{ième}}$ somme de Fourier), pour lequel $I - S_n$ est l'opérateur qui à f associe le reste partiel d'ordre $n+1$. Toutefois, ce n'est pas ce type d'opérateur qui permet de conclure: pour tout n, on a $\|I - S_n\| = 2$. Les techniques utilisées s'adaptent à des espaces U_Λ remplissant une condition arithmétique, facilement réalisée par $\mathbb{N}$ et $\mathbb{Z}$. Bien sûr, la propriété de Daugavet est stable par isométrie mais pas par isomorphisme. Ainsi, ce théorème n'empêche pas qu'il puisse exister sur U ou U^+ des normes équivalentes pour lesquelles la propriété de Daugavet soit vraie.

3 Compacité faible des opérateurs et applications

3.1 Espaces riches

Dans [7], on s'intéresse à la notion de sous-espace riche de $C(K)$, où K est compact, introduite par Bourgain dans les années 80 pour l'étude de certains espaces de fonctions analytiques, et des espaces de Sobolev [Bo2]. Elle a été réellement dégagée (et ainsi dénommée) par Wojtaszczyk dans son ouvrage [W]. Rappelons que X est un sous-espace riche de $C(K)$ s'il existe une mesure de probabilité σ sur K telle que: pour toute fonction $h \in C(K)$ et toute suite $(x_n)_n$ dans la boule unité de X, convergente vers 0 dans $L^1(K, \sigma)$, la distance (uniforme) de hx_n à X converge vers 0.

L'intérêt de cette notion est que si X est un sous-espace riche de $C(K)$ alors X a deux propriétés remarquables (communes avec $C(K)$ lui-même) : X a la propriété (V) de Pełczyński, et X^* (donc X) a la propriété de Dunford-Pettis. Rappelons qu'un espace de Banach X a la propriété (V) de Pełczyński si tout opérateur non faiblement compact, de X dans un espace de Banach arbitraire, fixe une copie de c_0. Un espace de Banach X a la propriété de Dunford-Pettis si tout opérateur, de X dans un espace de Banach arbitraire, faiblement compact est complètement continu (i.e. envoie une suite faiblement convergente sur une suite convergente en norme). L'exposé synthétique de Diestel [D] fait le point sur ces deux propriétés jusqu'en 1980, donc la notion d'espace riche n'y apparaît pas.

Nous démontrons que divers espaces sont riches, "enrichissant" les exemples déjà donnés par Bourgain ou Wojtaszczyk. Ce point de vue permet de retrouver très simplement des résultats connus et surtout d'en obtenir des versions plus générales.

Par exemple, Godefroy et Saab [GS] avaient montré qu'un sous-espace X de $C(K)$ dont l'orthogonal est réflexif a la propriété (V) de Pełczyński. Nous démontrons que c'est en fait un sous-espace riche de $C(K)$.

a) Sur les sous-espaces invariants par translation de $C(G)$, où G est un groupe abélien compact. On obtient notamment

Théorème 3.1 *1) Soit E le complémentaire d'un ensemble $\Lambda(1)$, alors $C_E(G)$ est un sous-espace riche de $C(G)$.*

2) Soit E le complémentaire dans $\mathbb{N}$ d'un ensemble $\Lambda(1)$, alors $C_E(\mathbb{T})$ est un sous-espace riche de $C(\mathbb{T})$.

Les espaces précédents ont en particulier la propriété de Dunford-Pettis. On ne sait toujours pas si c'est un fait général: Bourgain pose la question de savoir s'il existe une partie $\Lambda \subset \Gamma$ telle que $C_\Lambda(G)$ n'ait pas la propriété de Dunford-Pettis. Le théorème précédent permet d'exhiber de nouveaux espaces quotients de L^1 ayant la propriété de Dunford-Pettis.

b) Sur les sous-espaces invariants par translation de l'espace des séries de Fourier uniformément convergentes (ils ne sont pas tous riches). Précisons que ces espaces rentrent bien dans la catégorie des sous-espaces des fonctions continues sur un compact. Pas seulement de façon abstraite comme tout Banach séparable, mais de façon très concrète (et pratique) en associant à $f \in U$ la fonction $F_f \in C(\mathbb{T}\times K_0)$, où $K_0 = \{0\}\cup\{1/n|\, n \geq 1\}$, définie par $F(x,0) = f(x)$ et $F_f(x, 1/n) = S_n(f)(x)$, la somme partielle de Fourier d'ordre n de f en x. On obtient notamment

Théorème 3.2 *1) Soit E est le complémentaire d'un ensemble $\Lambda(2)$, alors U_E est un sous-espace riche de $C(\mathbb{T} \times K_0)$.*

2) Soit E est le complémentaire dans $\mathbb{N}$ d'un ensemble $\Lambda(2)$, alors U_E est un sous-espace riche de $C(\mathbb{T} \times K_0)$.

Tous ces résultats ont des applications; bien sûr, comme on l'a signalé, nous avons de nouveaux espaces ayant la propriété de Dunford-Pettis et la propriété (V) de Pełczyński: ceci était connu pour U et U^+ (i.e. quand E est vide): [Bo3], [S1], [S2]. Mais cela permet aussi construire de nouveaux ensembles de Riesz et ainsi d'améliorer des résultats de [13].

3.2 Un espace particulier sans la propriété (V)

Nous présentons ici un exemple d'espace invariant par translation sans la propriété (V) de Pełczyński. En fait, l'intérêt de cet espace est de fournir un exemple d'ensemble mince Λ tel que $C_\Lambda(\mathbb{T})$ contienne c_0 mais qui est loin d'avoir la propriété (V) (i.e. avoir "beaucoup" de c_0) dans la mesure où $C_\Lambda(\mathbb{T})$ contient un sous-espace (invariant par translation en plus) complémenté, isomorphe à ℓ^1. Nous ne connaissons pas de référence où de tels exemples aient été produits, même s'il paraît raisonnable que beaucoup d'autres exemples soient faciles à construire. L'exemple proposé ici n'a pas été publié. Nous donnons donc une preuve.

En fait, la construction s'appliquera à un type d'ensemble particulièrement bien connu: les ensembles polynômiaux. On notera $\mathcal{P} = P(\mathbb{N})$, où P est un polynôme tel que $P(\mathbb{N}) \subset \mathbb{N}$ et ayant un degré supérieur à 2.

Nous présentons un lemme général qui s'appliquera facilement par la suite [0].

Lemme 3.3 *Soit Λ une partie de $\mathbb{N}$, réunion finie de parties dont le pas tend vers l'infini.*

Alors toute partie infinie $\Lambda' \subset \Lambda$ contient une suite de Hadamard H telle que $C_H(\mathbb{T})$ soit complémenté dans $C_\Lambda(\mathbb{T})$.

L'hypothèse "le pas de E tend vers l'infini" signifie que $\lambda_{n+1}-\lambda_n \to +\infty$ quand $E = \{\lambda_n\}$. Nous noterons $[A]$ la maille engendrée par une partie finie A:

$$[A] = \Big\{ \sum_{a\in A} \varepsilon_a a \,|\, \varepsilon_a \in \{-1, 0, 1\} \Big\}.$$

En fait, on a la même conclusion avec une hypothèse plus faible: il suffit d'avoir l'existence de $p_0 \geq 1$ tel que pour une infinité de valeur de p, on puisse trouver $\lambda_p \in \Lambda' \subset \Lambda$ vérifiant $\Lambda \cap ([\lambda_p - (p_0 + p), \lambda_p - p_0] \cup [\lambda_p + p_0, \lambda_p + p_0 + p]) = \emptyset$. Quitte à extraire, cette suite peut être supposée Hadamard.

Justifions que c'est effectivement une hypothèse plus faible. Pour cela, supposons que $\Lambda' \subset \Lambda = \cup_{1\leq j\leq d}\Lambda_j$, où Λ' est infinie et le pas des Λ_j tend vers l'infini. On va noter δ_λ la distance de λ à son complémentaire dans Λ. Si $\sup\limits_{\lambda\in\Lambda'} \delta_\lambda = +\infty$, alors on a la conclusion avec $p_0 = 1$. Sinon, $\sup\limits_{\lambda\in\Lambda'} \delta_\lambda = M_1 \geq 1$ et on considère $\delta_\lambda^{(1)}$ la distance de λ à $\Lambda \setminus [\lambda - M_1, \lambda + M_1]$. À nouveau, soit $\sup\limits_{\lambda\in\Lambda'} \delta_\lambda^{(1)} = +\infty$, auquel cas $p_0 = M_1 + 1$ convient, soit $\sup\limits_{\lambda\in\Lambda'} \delta_\lambda^{(1)} = M_2 > M_1$. Et on réitère le procédé. Celui-ci s'arrête, et on a un p_0, comme promis. En effet, si on pouvait continuer ainsi jusqu'à obtenir M_d, on aurait une contradiction: par hypothèse, pour $\lambda \neq \lambda'$ assez grands (supérieurs à un certain N), appartenant à un même Λ_j (j quelconque), on a $|\lambda - \lambda'| > M_d$. Choisissons $\lambda_1 \in \Lambda'$ avec $\lambda_1 > N + M_d$. En fait $\lambda_1 \in \Lambda_{j_1}$ pour un certain j_1. Par définition de M_1, on peut trouver $\lambda_2 \in \Lambda_{j_2}$ (où j_2 est nécessairement différent de j_1) avec $|\lambda_1 - \lambda_2| \leq M_1$. De même, on peut trouver $\lambda_3 \in \Lambda_{j_3}$ (où $j_3 \notin \{j_1, j_2\}$) avec $|\lambda_1 - \lambda_3| \leq M_2$ et $\lambda_3 \notin [\lambda_1 - M_1, \lambda_1 + M_1]$. Et ce jusqu'à l'étape $d + 1$. Mais on obtiendrait ainsi $j_1, \ldots, j_{d+1}$ distincts à valeurs dans $\{1, \ldots, d\}$. ∎

Preuve lemme. Soit p_0 donné par la remarque précédente. Supposons $p_0 < h_1 < \cdots < h_p$ construits dans $\Lambda' \subset \Lambda$ avec $h_{j+1} \geq 3h_j$; $[\{h_1, \ldots, h_p\}] \cap \Lambda = \{h_1, \ldots, h_p\}$ et $[\{h_1, \ldots, h_p\}] \cap [-p_0, p_0] = \{0\}$. En notant $L = h_1 + \ldots + h_p$. On peut trouver $h_{p+1} \in \Lambda'$ tel que $[h_{p+1} - L, h_{p+1} + L] \cap (\Lambda \setminus]h_{p+1} - p_0, h_{p+1} + p_0[) = \emptyset$ et $h_{p+1} > 3h_p$. Dès lors, la suite (h_n) est Hadamard et $[\{h_1, \ldots, h_{p+1}\}] \cap \Lambda = \{h_1, \ldots, h_{p+1}\}$. On considère alors les produits de Riesz associés

$$R_N(x) = 2\prod_{n=1}^{N}[1+\cos(2\pi h_n x)].$$

Un argument standard de compacité préfaible dans $M(\mathbb{T})$ fournit une mesure μ bornée par 2 dont les coefficients de Fourier valent 1 sur H et s'annulent sur $\Lambda \setminus H$. L'opérateur de convolution par μ est donc une projection invariante par translation de $C_\Lambda(\mathbb{T})$ sur $C_H(\mathbb{T})$. ∎

Théorème 3.4 *Soit Λ une partie de $\mathbb{N}$, réunion finie de parties dont le pas tend vers l'infini.*

Alors

i) $C_\Lambda(\mathbb{T})$ contient une copie de ℓ^1 complémentée.

ii) $L^1_{\mathbb{Z}^-\cup\Lambda}(\mathbb{T})$ contient une copie de ℓ^2 complémentée.

iii) $C_\Lambda(\mathbb{T})$ n'a pas la propriété (V) de Pełczyński.

En particulier, $C_{\mathcal{P}}(\mathbb{T})$ n'a pas la propriété (V) de Pełczyński, mais contient des sous-espaces isomorphes à c_0.

On notera également d'autres conséquences de (i): $C_\Lambda(\mathbb{T})$ ne peut vérifier le Théorème de Grothendieck (version duale). Dans le même esprit, (ii) implique que $L^1_{\mathbb{Z}^-\cup\Lambda}(\mathbb{T})$ ne vérifie pas le Théorème de Grothendieck et n'a pas la propriété de Dunford-Pettis.

On pourrait aussi en déduire en utilisant les techniques de [4], Th. 1.13, que $\mathbb{Z}^-\cup\Lambda$ est un ensemble de continuité. Cependant, ce résultat se retrouve *via* la caractérisation arithmétique de Host-Parreau [HP].

Preuve. Le point (iii) est clairement une conséquence de (i).

Les points (i) et (ii) se déduisent du lemme précédent: la suite de Hadamard H est un ensemble de Sidon: $C_H(\mathbb{T})$ est isomorphe à ℓ^1. L'espace $L^1_H(\mathbb{T})$ est isomorphe à ℓ^2 (H étant Sidon donc un ensemble $\Lambda(2)$). La complémentation dans $C_\Lambda(\mathbb{T})$ étant invariante par translation, c'est équivalent à l'existence d'une mesure μ dont les coefficients de Fourier valent 1 sur H et 0 sur $\Lambda\setminus H$ (en fait la mesure μ donnée par la preuve du lemme). La convolution par μ donne donc une complémentation bornée de $L^1_\Lambda(\mathbb{T})$ sur $L^1_H(\mathbb{T})$. Enfin, on peut "rajouter" les entiers négatifs en utilisant le lemme 1.5 de [4].

Bien sûr le pas tend vers l'infini pour les ensembles polynômiaux. Le fait que $C_{\mathcal{P}}(\mathbb{T})$ contienne des sous-espaces isomorphes à c_0 a été établi par Lust-Piquard dans [Lu2] dans le cas d'un monôme $P(X) = X^s$, où $s \geq 2$. Toutefois, son argument s'adapte ici. ∎

Ajoutons quelques remarques: dès que Λ contient $A+B$, où A et B sont infinis, Λ ne peut être réunion finie de parties dont le pas tend vers l'infini. C'est par exemple le cas de $\{3^n+3^m | n>m\}$. Toutefois, cet ensemble a la propriété arithmétique du lemme et on peut donc contruire des copies complémentées de ℓ^1: il suffit de choisir $p_0 = 1$ et les λ_j parmi les 3^j+3^{j-1}.

Enfin, on adapte immédiatement l'argument de Déchamps-Gondim [DG1] (lemmes 6.1, 6.2 et corollaire) pour voir que tout p-Rider est réunion finie de parties dont le pas tend vers l'infini, quand $p < 4/3$. Ainsi l'exemple de Li-Queffélec-Rodríguez Piazza [LQR], qui contient une copie de c_0, contient aussi une copie complémentée de ℓ^1, il n'a donc pas la propriété (V).

Enfin, en lien avec la question de savoir si les carrés forment un ensemble stationnaire: on voit facilement que de tels ensembles contiennent une copie complémentée de ℓ^1 (donnée par tout Sidon infini contenu dans l'ensemble stationnaire). Ainsi, le théorème précédent vient confirmer la pertinence de cette question...

3.3 Absolue continuité

Diverses caractérisations des opérateurs faiblement compacts existent; elles sont intimement liées à la géométrie du domaine. Une de celles-ci a particulièrement suscité notre attention: la caractérisation de tels opérateurs sur C par Niculescu en terme d'absolue continuité (voir [N] ou [DJT] p.309), généralisée aux C^*-algèbres par Jarchow [J].

On rappelle qu'un opérateur $T : X \to Y$ est absolument continu s'il existe $j : X \to Z$, absolument sommant tel que pour tout $\varepsilon > 0$, on puisse trouver $k_\varepsilon > 0$ vérifiant: pour tout $x \in X$, $\|T(x)\| \leq k_\varepsilon \|j(x)\| + \varepsilon\|x\|$.

On vérifie facilement qu'un tel opérateur est faiblement compact. La réciproque n'est pas toujours vraie: sur un espace réflexif de dimension infinie, c'est clairement faux. Toutefois, Niculescu a démontré que c'est vrai sur l'espace des fonctions continues sur un compact.

3.3.1 L'algèbre du disque et H^∞

On peut facilement adapter les techniques utilisées dans la preuve de Jarchow pour remarquer que cette caractérisation s'étend pour des opérateurs faiblement compacts sur un sous-espace de C dont le dual a de bonnes propriétés de relèvement de ses parties faiblement compactes. Or c'est exactement ce que nous apprend le Théorème de Chaumat sur L^1/H^1 (voir [C]). On a ainsi [6]

Théorème 3.5 *Un opérateur T, borné de l'algèbre du disque $A(\mathbb{D})$, à valeurs dans un Banach Y, est faiblement compact si et seulement s'il existe une mesure de probabilité σ sur $\mathbb{T}$ telle que pour tout $\varepsilon > 0$, on puisse trouver $k_\varepsilon > 0$ vérifiant: pour tout $f \in A(\mathbb{D})$,*

$$\|T(f)\| \leq k_\varepsilon \|f\|_{L^1(\sigma)} + \varepsilon\|x\|_\infty.$$

Bien que nous ne l'ayons pas publié, il est clair que l'on a aussi une version du théorème précédent pour les sous-espaces de C dont l'orthogonal est réflexif. Il suffit d'appliquer la Proposition 1.3 de [6] et un lemme de Lohman sur les relèvements des suites faiblement Cauchy dans les quotients par un sous-espace ne contenant pas de copie de ℓ^1.

Une version adaptée existe pour H^∞. Ici, on gagne un bonus: la norme L^1 est relative à la mesure de Lebesgue, le "prix à payer" est une hypothèse de continuité préfaible de l'opérateur (que l'on ne peut éviter).

Théorème 3.6 *Soit Y un espace de Banach et $T : H^\infty \to Y^*$ un opérateur borné. T est faiblement compact et préfaiblement continu si et seulement si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $k_\varepsilon > 0$ tel que pour toute $f \in H^\infty$:*

$$\|T(f)\| \leq k_\varepsilon \|f\|_1 + \varepsilon\|x\|_\infty.$$

3.3.2 L'espace de Morse-Transue

La théorie des espaces d'Orlicz a été et est encore abondamment étudiée. Fixons un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, l'espace d'Orlicz L^ψ associé à la fonction ψ convexe, strictement croissante, nulle en 0, est l'espace des fonctions mesurables f telles qu'il existe une constante $C > 0$ vérifiant

$$\int_\Omega \psi(|f|/C)\,d\mathbb{P} \leq 1.$$

La norme $\|f\|_\psi$ de f est alors la borne inférieure de telles constantes C.

L'espace de Morse-Transue M^ψ est l'espace des fonctions mesurables f pour lesquelles $\int_\Omega \psi(|f|/C)d\mathbb{P}$ est finie pour tout $C > 0$. On a évidemment $M^\psi \subset L^\psi$. Ces notions généralisent les espaces de Lebesgue L^p usuels. L'espace M^ψ est séparable (dès que l'espace de probabilité l'est) tandis que L^ψ ne l'est pas en général. Sous certaines conditions de croissance (en l'occurence ∇_2), L^ψ est le bidual de M^ψ. On peut aussi voir M^ψ comme la fermeture de L^∞ dans L^ψ. Il est naturel de se poser la question d'une caractérisation de la faible compacité des opérateurs définis sur M^ψ. Avant de répondre à cette question, nous avons le critère général suivant [3] sur les opérateurs ne fixant pas de copie de c_0.

Théorème 3.7 *Soient ψ une fonction d'Orlicz (quelconque), X un sous-espace de M^ψ et T un opérateur de X dans un Banach Y.*

Alors T ne fixe aucune copie de c_0 si et seulement si

$$\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists C_\varepsilon > 0 : \quad \|Tf\| \leq \Big[C_\varepsilon \int_\Omega \psi\Big(\varepsilon \frac{|f|}{\|f\|_\psi}\Big)\, d\mathbb{P} + \varepsilon\Big] \, \|f\|_\psi, \ \ \forall f \in X.$$

On en déduit que ceci caractérise les opérateurs faiblement compacts dès que ψ satisfait ∇_2. C'est dû à la propriété (V) pour les sous-espaces de M^ψ, démontrée par D. Werner ([HWW] par ex.). Bien sûr, si la croissance de ψ est trop faible (typiquement polynomiale), plus précisément si ψ satisfait Δ_2 et ∇_2, l'espace est réflexif, ainsi il n'y a aucune caractérisation particulière à attendre. A noter que dans ce cas, le théorème précédent est juste mais...trivial.

Une version en terme d'absolue continuité peut ainsi être obtenue pour tous les sous-espaces de M^ψ [3]:

Théorème 3.8 *Soient ψ une fonction d'Orlicz vérifiant la condition Δ^0, X un sous-espace de M^ψ et T un opérateur de X dans un espace de Banach Y.*

Alors T est faiblement compact si et seulement si

$$\forall \varepsilon > 0, \ \exists C_\varepsilon > 0, \quad \|T(f)\| \leq C_\varepsilon \|f\|_1 + \varepsilon \, \|f\|_\psi, \quad \forall f \in X.$$

En fait, la norme dans L^1 peut être remplacée par la norme dans un L^p ($1 \leq p < \infty$). Ce résultat a pour corollaire le Théorème 1.5.

On ne peut a priori pas affaiblir radicalement les hypothèses dans ce théorème. Ainsi, on ne peut pas obtenir de critère similaire en remplaçant l'espace de Morse-Transue par l'espace d'Orlicz lui-même. C'est essentiellement dû au fait que L^∞ n'est pas dense dans L^ψ. D'autre part, la condition Δ^0 qui nie fortement la condition Δ_2, ne peut être remplacée par "ψ ne satisfait pas Δ_2". Voir [3] pour les exemples.

4 Opérateurs de composition et applications

Les opérateurs de composition sur les espaces de Hardy ont été largement étudiés, et le sont toujours. Il reste pourtant des champs inexplorés, par exemple dans le cadre des espaces d'Orlicz. Rappelons qu'un opérateur de composition C_φ, associé à une fonction analytique $\varphi : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$, est défini par $C_\varphi(f) = f \circ \varphi$, pour f appartenant à un certain espace de fonctions holomorphes sur le disque. La continuité est essentiellement assurée par le principe de subordination pour tous les espaces que nous considérons. Le cas des "gros" espaces (typiquement H^p, où $1 \leq p < \infty$) est bien connu (voir par exemple les ouvrages [Sh],[C-mC]). Nous nous sommes intéressés aux "petits" espaces, ce qui a amené aussi à préciser certains résultats classiques.

4.1 L'algèbre du disque et H^∞

Le problème de la compacité des opérateurs de composition C_φ sur $A(\mathbb{D})$ et H^∞ est facile: ils sont compacts si et seulement si $\|\varphi\|_\infty < 1$. Le problème de la faible compacité de tels opérateurs a tout son sens ici, alors que c'est une question triviale dans les H^p quand $p > 1$. Dans le cas de H^1, Sarason [Sa] a démontré que C_φ est compact si et seulement si il est faiblement compact (ce qui coincide avec la compacité dans les espaces H^p). Le même phénomène se produit pour les normes sup. Plus précisément, dès que l'opérateur de composition par φ est faiblement compact, alors cet opérateur est dans tous les idéaux usuels d'opérateurs [6]:

Théorème 4.1 *Soit $C_\varphi : H^\infty \to H^\infty$, l'opérateur de composition par φ. Les assertions suivantes sont équivalentes:*

i) $\|\varphi\|_\infty < 1$.
ii) *C_φ se factorise par l'identité de H^∞ dans H^1.*
iii) *C_φ est 1-sommante.*
iv) *C_φ est γ-sommant.*
v) *C_φ est nucléaire.*
vi) *C_φ est compact.*
vii) *C_φ faiblement compact.*

On a le même résultat pour les opérateurs de composition sur l'algèbre du disque. En fait, la coïncidence de la faible compacité et de la compacité avait déjà été établie pour les morphismes d'algèbres sur ces espaces dans [AGL] et [GL] mais nous utilisons un tout autre point de vue: l'absolue continuité des opérateurs (voir la partie 3.3.1).

4.2 Espaces de Hardy-Orlicz

Avant tout, précisons le cadre. Il y a plusieurs façons de voir les espaces de Hardy-Orlicz. Etant donnée une fonction d'Orlicz ψ, l'espace de Hardy-Orlicz H^ψ est l'espace des fonctions analytiques sur $\mathbb{D}$ telles que (par exemple) il existe $f^* \in L^\psi(\mathbb{T})$ avec $\widehat{f^*}(n) = 0$ pour $n < 0$ et $f(z) = \sum_{n\geq 0} \widehat{f^*}(n) z^n$, $z \in \mathbb{D}$. La norme de f est définie par $\|f\|_{H^\psi} = \|f^*\|_\psi$. On note HM^ψ l'espace de Hardy-Morse-Transue, i.e. le sous-espace $\{f \in H^\psi\,;\ f^* \in M^\psi(\mathbb{T})\}$.

Nous avons vu dans 3.3.2 un critère de faible compacité, en terme d'absolue continuité, pour les opérateurs définis sur l'espace de Morse-Transue. Comme ce point de vue s'est avéré fructueux pour l'étude des opérateurs de composition sur l'algèbre du disque et H^∞, on cherche bien sûr à adapter ceci au cadre des espaces d'Orlicz. Cette démarche est payante et permet de caractériser la faible compacité des C_φ. Néanmoins, nous ne nous contentons pas dans [2] de la faible compacité: l'appartenance à d'autres idéaux d'opérateurs est étudiée. Bien entendu, les résultats dépendent de la nature de la fonction d'Orlicz associée et on peut s'attendre à tout un éventail de comportement lorsque ψ se situe entre les extrêmes H^1 et H^∞ (voir l'annexe 5.4 pour différentes notions de croissance et de régularité). Nous ne présentons pas ici tous les résultats de [2]. Signalons tout de même que le cas gaussien ($\psi(x) = \psi_2(x) = \exp(x^2)$) est entièrement caractérisé (ce n'est qu'un cas particulier de ce qui se passe dès que ψ vérifie la condition Δ^2). Noter la différence avec le cas hilbertien.

Théorème 4.2 *Les assertions suivantes sont équivalentes:*

1) *$C_\varphi : H^{\psi_2} \to H^{\psi_2}$ est borné pour l'ordre dans $M^{\psi_2}(\mathbb{T})$;*

2) $C_\varphi \colon H^{\psi_2} \to H^{\psi_2}$ *est compact;*

3) $C_\varphi \colon H^{\psi_2} \to H^{\psi_2}$ *est faiblement compact;*

4) $\frac{1}{1-|\varphi|} \in L^p(\mathbb{T}), \forall p \geq 1$*;*

5) $\forall q \geq 1\ \exists C_q > 0$*:* $\quad m(1 - |\varphi| < \lambda) \leq C_q \lambda^q$*;*

6) $\forall q \geq 1\ \|\varphi^n\|_1 = o\,(n^{-q})$*;*

7) $\|\varphi^n\|_{\psi_2} = o\,(1/\sqrt{\log n})$.

Signalons que pour une croissance moins forte, certains résultats subsistent. Par exemple, si ψ satisfait Δ^0 alors C_φ est compact dès qu'il est faiblement compact. Par contre, on peut exhiber une fonction d'Orlicz satisfaisant Δ^1 et un opérateur de composition compact, mais non borné pour l'ordre.

Dans ce cadre, comme dans le cadre du paragraphe précédent, le comportement de C_φ dépend du comportement au bord (i.e. sur le cercle) de φ. Or dans le cadre classique hilbertien, il n'y a pas de résultat de ce genre. Le théorème de Shapiro qui caractérise la compacité à l'aide de la fonction de comptage de Nevanlinna utilise les valeurs de φ dans le disque. Mais n'y a t-il pas une caractérisation par les valeurs du module au bord ? La réponse est négative:

Théorème 4.3 *Il existe deux fonctions analytiques φ_1 et φ_2 de $\mathbb{D}$ dans $\mathbb{D}$ ayant mêmes modules sur $\mathbb{T}$ mais pour lesquelles les opérateurs de composition associés sont de natures différentes:*

$C_{\varphi_2} \colon H^2 \to H^2$ est compact alors que $C_{\varphi_1} \colon H^2 \to H^2$ ne l'est pas.

L'outil essentiel pour le résultat précédent est une caractérisation antérieure à celle de Shapiro, due à McCluer [McC], en terme de mesures de Carleson: l'opérateur C_φ sur H^2 est compact si et seulement la mesure image par φ des fenêtres de Carleson d'ouverture h est $o(h)$. En fait, cela marche de la même façon sur H^p. Rappelons que la fenêtre de Carleson centrée en $w \in \mathbb{T}$, d'ouverture h est $W(w,h) = \{z \in \mathbb{D}\,;\ |z| \geq 1 - h$ et $|\arg(z\bar{w})| \leq h\}$. Les travaux autour des mesures de Carleson sont toujours d'actualité ([HJ],[BJ],...). On souhaite naturellement l'existence d'un critère similaire dans le cadre des espaces d'Orlicz. On a la caractérisation suivante de la compacité. Noter que dans le cas particulier où $\mu = \mu_\varphi$ est la mesure image de $\varphi : \mathbb{D} \mapsto \mathbb{D}$, la compacité de I_{μ_φ} et de C_φ sont équivalentes et cela donne bien un critère de compacité des opérateurs de composition.

Théorème 4.4 *Soient μ une mesure de Borel finie sur le disque fermé $\overline{\mathbb{D}}$ et ψ une fonction d'Orlicz satisfaisant ∇_0. Les assertions suivantes sont équivalentes.*

1) L'identité I_μ de H^ψ dans $L^\psi(\mu)$ est compacte.

2) Pour tout $A > 1$, $\displaystyle \sup_{|w|=1} \mu\Big(W(w,h)\Big) \leq \frac{1}{\psi(A\psi^{-1}(1/h))}$*, pour h assez petit.*

3) Pour tout $A > 1$, $\displaystyle \sup_{|w|=1} \mu\Big(W(w,h)\Big) = o\bigg(\frac{1}{\psi(A\psi^{-1}(1/h))}\bigg)$*, quand $h \to 0$.*

On peut se passer de la condition sur ψ lorsque $\mu = \mu_\varphi$.

(En fait, les résultats de [2] sont plus généraux).

Les idées s'adaptent également au cadre des espaces de Bergman-Orlicz. $\mathcal{B}^\psi$ est l'espace des fonctions analytiques sur $\mathbb{D}$ qui sont dans l'espace d'Orlicz associé à la mesure de Lebesgue normalisée sur $\mathbb{D}$. On a le critère suivant qui est dans l'esprit du critère de compacité pour les opérateurs de composition sur les Bergman hilbertiens.

Théorème 4.5 *On suppose que ψ satisfait la condition Δ^2.*
L'opérateur de composition $C_\varphi \colon \mathcal{B}^\psi \to \mathcal{B}^\psi$ est compact si et seulement si

$$\frac{\psi^{-1}\Big[\dfrac{1}{(1-|\varphi(a)|)^2}\Big]}{\psi^{-1}\Big[\dfrac{1}{(1-|a|)^2}\Big]} \underset{|a| \overset{<}{\to} 1}{\longrightarrow} 0.$$

Annexes

5.1 Ensembles lacunaires

Nous précisons ici quelques définitions d'ensembles minces.

- **Ensembles p-Sidon:** Soit $1 \leq p < 2$, $E \subset \Gamma$ est dit p-Sidon si il existe $C > 0$ tel que pour tout $f \in C_E(G)$

  $$\Big(\sum_{n \in E} |\hat{f}(n)|^p\Big)^{1/p} \leq C\|f\|_\infty.$$

  Pour $p = 1$, on parle simplement d'ensemble de Sidon.

- **Ensembles p-Rider:** Soit $1 \leq p < 2$, $E \subset \Gamma$ est dit p-Rider si il existe $C > 0$ tel que pour tout polynôme trigonométrique f à spectre dans E

  $$\Big(\sum_{n \in E} |\hat{f}(n)|^p\Big)^{1/p} \leq C\,[\![f]\!]\,.$$

  où $[\![f]\!]$ est la norme de f dans C^{ps}: $[\![f]\!] = \mathbb{E}\|f^\omega\|_\infty$, avec $\widehat{f^\omega}(\gamma) = \varepsilon_\gamma(\omega)\hat{f}(\gamma)$, où les ε_γ sont des v.a.i. indépendantes à valeurs dans $\{-1, 1\}$.

  Pour $p = 1$, cela équivaut à ensemble de Sidon (Théorème de Rider).

- **Ensembles $\Lambda(p)$:** Soit $p > 2$, $E \subset \Gamma$ est dit $\Lambda(p)$ si $\|.\|_p$ et $\|.\|_2$ sont équivalentes sur $L^2_E(G)$.

- **Ensembles UC:** $E \subset \mathbb{Z}$ est un ensemble de convergence uniforme si la série de Fourier de toute fonction $f \in C_E(\mathbb{T})$ converge uniformément vers f.

- **Ensembles stationnaires:** $E \subset \Gamma$ est dit stationnaire si il existe $C > 0$ tel que pour tout polynôme trigonométrique f à spectre dans E: $[\![f]\!] \leq C\|f\|_\infty$.

- **Ensembles de Riesz:** $E \subset \Gamma$ est dit Riesz si toute mesure $\mu \in M(G)$, à spectre dans E, est absolument continue par rapport à la mesure de Haar.

- **Ensembles de Rosenthal:** $E \subset \Gamma$ est dit Rosenthal si toute fonction $f \in L^\infty_E(G)$ est égale (presque partout) à une fonction continue (nécessairement dans $C_E(G)$).

- **Ensembles LP:** $E \subset \Gamma$ est dit ensemble LP (Lust-Piquard) si, pour tout moyenne invariante M sur $L^\infty(G)$, tout $\gamma \in \Gamma$ et toute fonction $f \in L^\infty_E(G)$, on a $M(\overline{\gamma} f) = \hat{f}(\gamma)$.

5.2 Conditions de croissance

Nous précisons ici quelques définitions de conditions de croissance pour une fonction d'Orlicz ψ. Certaines notations sont inhabituelles par rapport à la littérature mais nous reprenons celles de [2]. Nous y avons motivé nos choix.

- ψ satisfait la condition Δ_2 si $\psi(2x) \leq K\,\psi(x)$, pour une certaine constante $K > 0$ et x assez grand.
- ψ satisfait la condition Δ^0 si, pour un certain $\beta > 1$: $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\psi(\beta x)}{\psi(x)} = +\infty$. Un exemple est $\psi(x) = \exp[(\log(x+1)^{3/2}] - 1$.
- ψ satisfait la condition Δ^2 si $\psi(x)^2 \leq \psi(\alpha x)$, pour une certaine constante $\alpha > 0$ et x assez grand. Ceci correspond typiquement au cas gaussien: $\psi(x) = \psi_2(x) = \mathrm{e}^{x^2} - 1$.
- ψ satisfait la condition ∇_0 si pour tout $A > 1$, il existe $C \geq 1$ tel que $\frac{\psi(Ax)}{\psi(x)} \leq \frac{\psi(ACy)}{\psi(y)}$, pour $y > x$ assez grands. En fait, il s'agit d'une condition de régularité (plutôt que de croissance). Par exemple, les fonctions puissances $\psi(x) = x^p$ ont ∇_0, mais aussi les fonctions satisfaisant Δ^2. Il suffit que la fonction $x \mapsto \log\big(\psi(\exp(x))\big)$ soit convexe (auquel cas, c'est vrai avec $C = 1$).

Publications

[0] Résultats originaux non publiés.

[1] avec L. Rodríguez-Piazza, *Invariant means and thin sets in harmonic analysis. An application to the prime numbers.,* en préparation.

Articles dans des revues internationales avec comité de lecture :

[2] [a] avec D. Li, H. Queffélec, L. Rodríguez-Piazza, *Composition operators on Orlicz spaces,* soumis.

[b] avec D. Li, H. Queffélec, L. Rodríguez-Piazza, *Composition operators on Orlicz spaces,* à paraître aux Comptes Rendus de l'Académie des Sciences.

[3] avec D. Li, H. Queffélec, L. Rodríguez-Piazza, *Weak compactness and Orlicz spaces,* soumis.

[4] avec L. Rodríguez-Piazza, *On the structure of spaces of uniformly convergent Fourier series,* à paraître dans Math. Annalen.

[5] avec L. Rodríguez-Piazza, *The union of Riesz set and a Lust-Piquard set is a Riesz set,* Journal Funct. Analysis 233 (2006), no. 2, 545–560.

[6] *Some characterizations of weakly compact operators on H^∞ and on the disk algebra. Application to composition operators,* J. Operator Th 54 (2005) no2, 229-238.

[7] *Some new rich subspaces of C. Applications,* Bull. Sci. Math 128 (9) 2004, 789-801.

[8] avec D. Li, H. Queffélec, L. Rodríguez-Piazza, *Some translation invariant Banach function spaces which contain c_0,* Studia Math. 163(2) 2004, 137-155.

[9] avec L. Rodríguez–Piazza, *p-Rider sets are q-Sidon sets,* Proc. Amer. Math. Soc. 131(2003) 1829-1838.

[10] avec D. Li, H. Queffélec, L. Rodríguez-Piazza, *Lacunary Sets and Function Spaces with finite cotype,* Journal Funct. Analysis 188 (2002) 272-291.

[11] avec D. Li, *Some remarks on Quasi-Cohen sets,* Colloquium Math. 89 (2001) 169-178.

[12] *Topological dichotomy and unconditional convergence,* Serdica Mathematical Journal 25 (1999) 297-310.

[13] *Measures and lacunary sets,* Studia Mathematica 133-2(1999) 145-161.

[14] *On some properties of the class of stationary sets,* Colloquium Mathematicum 76(1998) 1-18.

Autres revues :

[1] *Sur les ensembles de convergence uniforme,* Publications Mathématiques d'Orsay 94-24 (1994).

[2] *Mesures et ensembles lacunaires,* Publications Mathématiques de l'Université Pierre et Marie Curie (Année 1998/99).

[3] *Ensembles stationnaires de Pisier et ensembles lacunaires,* Publications Mathématiques de l'Université Pierre et Marie Curie 120 (Année 1996/97).

References

[AGL] R. Aron, P. Galindo, M. Lindström, Compact homomorphisms between algebras of analytic functions, Studia Math. 123 (3) (1997), 235-246.

[BJ] O. Blasco, H. Jarchow, A note on Carleson measures for Hardy spaces, Acta Sci. Math. 71 (2005), No.1-2, 371-389.

[Bo1] J. Bourgain, On bases in the disc algebra. Trans. Amer. Math. Soc. 285 (1984), no. 1, 133–139.

[Bo2] J. Bourgain, The Dunford-Pettis property for the ball algebra, the polydisk algebras and Sobolev spaces, Studia math 77 (1984), 245-253.

[Bo3] J. Bourgain, Quelques propriétés linéaires topologiques de l'espace des séries de Fourier uniformément convergentes, Sem. Inititiation à l'analyse, 22e année (1982-83), exposé 14.

[Bo4] J. Bourgain, Bounded orthogonal systems and the Λ *(p)-set problem. Acta Math. 162, No.3/4 (1989), 227-245.*

[BM] J. Bourgain, V Milman Dichotomie du cotype pour les espaces invariants, CRAS. 300 (1985), 263-266.

[C] J. Chaumat, Une généralisation d'un théorème de Dunford-Pettis, Analyse harmonique. Orsay Paris XI (preprint 1974).

[C-mC] C. C. Cowen and B. D. MacCluer, Composition operators on spaces of analytic functions, Studies in Advanced Mathematics, CRC Press, Boca Raton, FL (1995).

[DG1] M. Dechamps-Gondim, Ensembles de Sidon topologiques, Ann. Inst. Fourier 22, No.3 (1972), 51-79.

[DG2] M. Dechamps-Gondim, Sur les compacts associés aux ensembles lacunaires, les ensembles de Sidon et quelques problèmes ouverts, Publ. Math. Orsay 84-01 (1984).

[DP] R. E. Dressler, L. Pigno, Une remarque sur les ensembles de Rosenthal et de Riesz, C.R.A.S. Paris 280 (1975), 1281-1282.

[D] J.Diestel, A survey of results related to the Dunford-Pettis property, Contemp. Math. 2 (1980), 15-60.

[DJT] J.Diestel, H. Jarchow, A. Tonge, Absolutely summing operators, Cambridge (1995).

[FP] J. Fournier-L. Pigno, Analytic and arithmetic properties of thin sets, Pacific J. Math. 105 (1983) 115-141.

[GL] P. Galindo, M. Lindström, Weakly compact homomorphisms between small algebras of analytic functions, Bull. London Math. Soc. 33 (2001),715-726.

[Go] G. Godefroy, On Riesz subsets of abelian discrete groups , Israel J. of Maths 61, (1988) 301-331

[GS] G. Godefroy, P. Saab, Quelques espaces de Banach ayant les propriétés (V) et (V) de Pełczyński, CRAS, (1986) t.303, p.503-506*

[H] K. Hare, Union results for thin sets. Glasg. Math. J. 32, No.2 (1990), 241-254.

[HJ] H. Hunziker, H. Jarchow, Composition operators which improve integrability, Math. Nachr. 152 (1991), 83–99.

[HP] B. Host, F. Parreau, Ensembles de Rajchman et ensembles de continuite, C. R. Acad. Sci., Paris, Sér. A 288 (1979), 899-902.

[HWW] P Harmand, D Werner, W Werner, M-ideals in Banach Spaces and Banach Algebras, Lectures notes 1547

[J] H. Jarchow, On weakly compact operators on C^*-algebras. Math. Ann. 273 (1986), no. 2, 341-343.

[Ka] Y. Katznelson, Suites aleatoires d'entiers. Analyse harmon. Domaine compl., Actes Table ronde internat. Centre Nat. Rech. Sci., Montpellier 1972, Lect. Notes Math. 336, 148-152 (1973).

[K-P] N. Kalton, A. Pełczyński, Kernels of surjections from $\mathcal{L}_1$-spaces with an application to Sidon sets, Math. Ann. 309, No.1 (1997), 135-158.

[KP] S. Kwapień, A. Pełczyński, Absolutely summing operators and translation invariant spaces of functions on compact abelian groups, Math. Nachr. 94 (1980), 303-340.

[KR] K. Kunen, W. Rudin, Lacunarity and the Bohr topology, Math. Proc. Camb. Philos. Soc. 126, No.1(1999), 117-137.

[KSSW] V. Kadets, R.V. Shvidkoy, G.G. Sinotkin, D. Werner Banach spaces with the Daugavet property, Trans Amer. Math. Soc. 352 (2000), 855-873.

[Li1] D. Li, A class of Riesz sets, Proc. Amer. Math. Soc. 119 (1993), 889-892.

[Li2] D. Li, A remark about $\Lambda(p)$-sets and Rosenthal sets, Proc. Amer. Math. Soc. 126, No.11 (1998), 3329-3333.

[LQ] D. Li, H. Queffélec, Introduction à l'étude des espaces de Banach, SMF. Cours spécialisés 12 (2004).

[LQR] D. Li, H. Queffélec and L. Rodríguez–Piazza, Some new thin sets of integers in harmonic analysis, J. Anal. Math. 86 (2002), 105-138.

[Lu1] F. Lust-Piquard, Eléments ergodiques et totalement ergodiques dans $L^\infty(G)$, Studia Math. 69 (1981), 191-225.

[Lu2] F. Lust-Piquard, Bohr local properties of $C_\Lambda(G)$, Colloq. Math. 58 (1989), 29-38

[M] IM. Miheev, Trigonometric series with gaps, Analysis Math. 9 (1983) 43-55.

[McC] B. Mc Cluer, Compact composition operators on $H_p(B^N)$, Michigan Math. J. 32 (1985), no. 2, 237-248.

[Me] Y. Meyer, Spectres des mesures et mesures absolument continues, Studia Math., 30 (1968), 87-99

[N] C. Niculescu, Absolute continuity and weak compactness, Bull. Am. Math. Soc. 81 (1975), 1064-1066 (2002).

[Ne] S. Neuwirth, Two random constructions inside lacunary sets. Ann. Inst. Fourier 49, No.6 (1999), 1853-1867.

[P1] G. Pisier, Sur l'espace de Banach des séries de Fourier aléatoires presque surement continues, Sem. Géometrie des Espaces de Banach. Ecole Polytechnique 1977-78.

[P2] G. Pisier, Some results on Banach spaces without local unconditional structure. Compos. Math. 37 (1978), 3-19.

[P3] G. Pisier, Factorisation in Banach Spaces and Geometry in Banach Spaces, CBMS Regional Conf. N 60- Amer. Math. Soc., Providence R.I.

[Ro] Rodríguez-Piazza, Rango y propriedas de medídas vectoriales. Conjuntos p-Sidon p.s., Thèse. Sevilla (1991).

[RS] L.A., Rubel; A.L. Shields. Invariant subspaces of L^∞ and H^∞, J. Reine Angew. Math. 272 (1975), 32-44.

[Ru] W. Rudin, Trigonometric series with gaps, J. Math. Mech. 9 (1960), 203-227

[S1] S. Saccone, The Pełczyński property for tight subspaces, J. of Funct. Analysis 148 (1997), 86-116.

[S2] S. Saccone, Function theory in spaces of uniformly convergent Fourier series, Proc. Amer. Math. Soc. 128 (2000), 1813-1823.

[Sa] D. Sarason, Weak compactness of holomorphic composition operators on H^1. Functional analysis and operator theory, Proc. Conf. Mem. U. N. Singh, New Delhi/India 1990, Lect. Notes Math. 1511, 75-79 (1992).

[Sh] J. H. Shapiro, Composition operators and classical function theory, Universitext.Tracts in Mathematics, Springer-Verlag, New York (1993).

[T] M. Talagrand, Sections of smooth convex bodies via majorizing measures. Acta Math. 175, No.2 (1995), 273-300.

[W] P. Wojtaszczyk, Banach Spaces for Analysts, Cambridge Studies in Advanced Math. 25 (1991)