Capes de Mathématiques.
Université d'Artois
P. Lefèvre.

Probabilités I

Exercice 1 Dix chevaux numérotés sont au début d'une course.
a) Combien de tiercés dans l'ordre sont-ils possibles ?
b) Parmi ces tiercés, combien y en a-t-il où le numéro 2 est premier ?
c) Combien de tiercés dans le désordre sont possibles ?

Exercice 2 Monsieur DELAPOUZE voudrait donner son nom à une nouvelle variété de citrouille. Pour des raisons commerciales, ce nom doit comporter 4 lettres. On convient donc de former un nouveau nom en utilisant une partie des lettres du nom de Monsieur DELAPOUZE.
a) Combien peut-on former de noms sans répétition de lettres ?
b) Combien peut-on former de noms différents ?
c) Combien peut-on former de noms dont les lettres sont dans le même ordre que dans le nom de Monsieur DELAPOUZE ?

Exercice 3 Serge répartit les pages de publicité dans la revue $\mathcal{L'EXPOINT}$. Pour ne pas indisposer les lecteurs, il ne peut pas placer deux pages de publicité à la suite. Sachant qu'il doit placer k pages de publicité différentes dans une revue qui en compte n, calculer le nombre de manières de disposer la publicité. On suppose que l'ordre des pages non-publicitaires (entre elles) est fixé et qu'il n'y a aucune contrainte sur celui des pages publicitaires.

Exercice 4 Soient E et F deux ensembles de cardinal n et k respectivement.
Déterminer le nombre de surjections $f|E \to F$ (on suppose $n \geq k$). On pourra suivra la démarche suivante.

c1) Montrer que pour $k \geq 1$ on a $\sum_{i=1}^{k} C_k^i S_n^i = k^n$, où S_n^i désigne le nombre de surjections d'un ensemble à n éléments sur un ensemble à i éléments.

c2) Montrer que les égalités précédentes peuvent être décrites par une égalité $AX = Y$, où A est une matrice d'ordre $n \times n$ et X et Y sont deux vecteurs.

c3) Montrer que A est inversible et que les coefficients (b_{ij}) de A^{-1} sont $b_{ij} = (-1)^{i+j} C_i^j$. Expliquer comment on pouvait trouver A^{-1} ?

c4) Montrer que $S_n^k = \sum_{i=1}^{k} (-1)^{k+i} C_k^i i^n$

Exercice 5 On tire 13 cartes dans un jeu de 52 cartes. La probabilité que ce tirage soit dépourvu au moins d'une couleur est-elle égale à $\dfrac{C_4^1 C_{39}^{13}}{C_{52}^{13}}$? Pourquoi ?

Exercice 6 Si 10 couples mariés sont assis au hasard autour d'une table, calculer la probabilité qu'aucune femme ne soit assise à côté de son mari.

Exercice 7 Problème des rencontres. Soit $n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$. On tire, une à une, les n boules numérotées (de 1 à n) d'une urne. On note A_i l'évènement "La $i^{\text{ème}}$ boule tirée porte le numéro i", où $i \in \{1, \cdots, n\}$.

a) Décrire mathématiquement l'ensemble Ω de tous les tirages et la probabilité $\mathbb{P}$ sous-jacente. Quel est le cardinal de Ω ?

b) Pour tout $i \in \{1, \cdots, n\}$, calculer $\mathbb{P}(A_i)$. Pour tout $k \in \{2, \cdots, n\}$ et tous $i_1 < \cdots < i_k$ dans $\{1, \cdots, n\}$, calculer $\mathbb{P}(A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k})$.

c) Déterminer la probabilité qu'il n'y ait aucune rencontre (c'est à dire qu'il n'y ait jamais coïncidence du numéro d'une boule et de son rang de tirage).

d) Quel est la limite du résultat précédent quand n tend vers $+\infty$?

Exercice 8 Un Laboratoire a un test de dépistage d'une maladie qui fonctionne comme suit. Si le patient est malade il est positif à 50%. Si le patient n'est pas malade il est négatif à 99%. Dans une population donnée il y a 0,5% des malades (statistiquement). On fait le test à un patient, il est positif. Quelle probabilité le patient a-t-il d'être effectivement malade ? On refait le test, il est à nouveau positif. Quelle probabilité le patient a-t-il d'être vraiment malade ?

Exercice 9 Quand on téléphone chez Pierre entre 18h et 19h, on a neuf chances sur dix de tomber sur son répondeur. Il utilise cet interlocuteur électronique lorsqu'il est là deux fois sur trois pour ne pas avoir à répondre à des importuns. Quand il est absent, il l'utilise toujours.

a) Calculer la probabilité de téléphoner lorsqu'il est là. (indication : on s'intéressera, par exemple, à la probabilité de "tomber sur le répondeur de Pierre")

b) On tombe sur son répondeur, calculer la probabilité qu'il soit présent.

Exercice 10 Soit $n = p_1^{\alpha_1} \cdots p_r^{\alpha_r}$ un nombre entier et sa décomposition en facteurs premiers. Soit $\Omega = \{1, \ldots, n\}$ muni de la probabilité uniforme et $A_i = \{k \in \Omega \;/\; p_i \text{ divise } k\}$ pour $1 \le i \le r$.

a) Calculer chaque $P(A_i)$.

b) Montrer que les événements $A_1, \ldots, A_r$ sont mutuellement indépendants.

c) Calculer la probabilité de l'événement: $B = \{k \in \Omega \;/\; \text{ aucun } p_i \text{ divise } k\}$.

d) En déduire la valeur de la fonction $f|\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ donnée par $f(n) = \text{card}B$.

Exercice 11 Une urne contient r boules rouges et v boules vertes. L'une de ces boules est tirée au hasard. Quand on la remet dans l'urne, on y rajoute c nouvelles boules de la même couleur. On tire une deuxième boule. Montrer que la probabilité pour que la première soit rouge sachant que la deuxième est verte vaut $\dfrac{r}{r+v+c}$. Les événements

A : "la première boule est rouge" et

B : "la deuxième boule est verte"

sont-ils indépendants ?

Exercice 12 On place un pion sur le point 0 de la droite. On le fait bouger d'une unité ou bien à droite avec probabilité p ou bien à gauche avec probabilité 1- p. On réitère le procédé de façon infinie. Quelle est la probabilité de retourner une infinité de fois au point 0 ? Suggestion: Considérer l'évènement "rentrer au point 0 au bout de 2n pas". Pour $p \neq \frac{1}{2}$, on pourra utiliser Borel-Cantelli.

Exercice 13 On dit qu'une variable aléatoire est sans mémoire si pour tous $s, t \ge 0$,

$$\mathbb{P}(\{X > s + t\}/\{X > s\}) = \mathbb{P}(\{X > t\}).$$

Soit X une variable aléatoire à densité à valeurs réelles positives. Montrer qu'elle suit une loi exponentielle si et seulement si elle est sans mémoire.

Exercice 14 Calculer l'espérance et la variance d'une variable aléatoire suivant une loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$.

Exercice 15 Les notes de l'examen se répartissent suivant la loi $\mathcal{N}(9,4)$. Sachant que Paul a eu plus que 11, quelle est la probabilité que sa note soit comprise entre 8 et 13 ? (on admet qu'il soit possible d'avoir une note négative ou une note supérieure à 20 à cet examen)

Exercice 16 Soit $\lambda > 0$. X est une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$. On suppose que X a la propriété suivante : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, on a $n\mathbb{P}(\{X=n\}) = \lambda.\mathbb{P}(\{X=n-1\})$.

a) Déterminer la loi de X. De quelle type de loi s'agit-il ?

b) La variable aléatoire Y est égale à $f(X)$, où $f(x) = \dfrac{1+(-1)^x}{2}$. Déterminer la loi de Y. De quelle type de loi s'agit-il ?

c) Quelle est l'espérance mathématique de Y ?

Exercice 17 Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ dont la loi est :

$$\text{pour } n \in \mathbb{N}^*,\ \mathbb{P}(X=n) = c\frac{2^{-n}}{n},\ \text{où } c \text{ est un réel.}$$

1) Calculer c.

2) Calculer l'espérance de X.

3) Calculer l'écart type de X.

Exercice 18 Le temps de survie d'une savonnette mesuré en jours est une variable aléatoire T définie par sa densité de probabilité pour $t \geq 0$: $f(t) = ate^{-\lambda t}$; et pour $t < 0$: $f(t) = 0$, où a et λ sont deux réels.

a) Quelle est la valeur de a en fonction de λ ?

b) Déterminer la fonction de répartition F de la variable aléatoire T.

On supppose que $\mathbb{E}(T) = 20$.

c) Calculer λ.

d) Calculer l'écart type de T.

e) Calculer la probabilité pour qu'une savonnette dure plus de 30 jours sachant qu'elle est toujours là au bout de 10 jours.

f) On pose $Y = e^{\lambda T}$. Déterminer une densité de Y.