UNIVERSITÉ D'ARTOIS

SUITES ET SERIES DE FONCTIONS

Exercices

2015 - 2016

U N I V E R S I T É D' A R T O I S

Licence 2
Mathématiques

Licence de Mathématiques

Université d'Artois

Suites et Séries de Fonctions

Exercices

TD LM2
Pascal Lefèvre

1 Espaces complets

Exercice 1.1

On considère l'ensemble des rationnels $\mathbb{Q}$ avec la distance induite par la distance usuelle sur $\mathbb{R}$ (autrement dit la valeur absolue). Est-ce que l'on a ainsi un espace complet ?

Exercice 1.2

Montrer que l'espace $\left(\ell^1, \|\cdot\|_1\right)$ est complet.

Exercice 1.3

On considère l'espace $C([0,1])$ des fonctions continues sur $[0,1]$ à valeurs dans $\mathbb{C}$, muni de la norme uniforme $\|.\|_\infty$. Montrer que cet espace est complet.

Exercice 1.4

Soit $\omega : [0,1] \to \mathbb{R}^{+*}$. On considère l'espace E_ω des fonctions définies sur $[0,1]$ à valeurs dans $\mathbb{C}$ telles que $\sup\limits_{t\in[0,1]} \omega(t)|f(t)|$ est fini.

a) Justifier que $f \in E_\omega \longmapsto \|f\|_\omega = \sup\limits_{t\in[0,1]} \omega(t)|f(t)|$ définit une norme.

b) Montrer que $\left(E_\omega, \|\cdot\|_\omega\right)$ est complet.

Exercice 1.5

On munit $\mathbb{R}^+$ de la distance $d(x,y) = \left|\dfrac{1}{x+1} - \dfrac{1}{y+1}\right|$.

1) Justifier que $\left(\mathbb{R}^+, d\right)$ est un espace métrique.

2) Montrer qu'il n'est pas complet.

Exercice 1.6

On considère l'espace $C([0,1])$ muni de la norme $\|f\|_1 = \displaystyle\int_0^1 |f(t)|\, dt$.

1) Montrer que l'on a effectivement un espace vectoriel normé.

2) On veut montrer que cet espace n'est pas complet. Pour $n \geqslant 2$, on va considérer des fonctions continues f_n qui valent -1 sur $\left[0, \frac{1}{2} - \frac{1}{n}\right]$ et 1 sur $\left[\frac{1}{2} + \frac{1}{n}, 1\right]$.

a) Justifier que l'on a ainsi une suite de Cauchy.

b) Montrer que cette suite n'est pas convergente. Pour cela, on suppose que la suite converge vers $f \in C([0,1])$:

(i) Soit $a \in \left]0, \frac{1}{2}\right[$. Justifier que $\displaystyle\int_0^a |f(t)+1|\, dt = 0$.

(ii) Conclure.

Exercice 1.7

Soit p un nombre premier. On munit $\mathbb{Z}$ de la distance p-adique: pour $x, y \in \mathbb{Z}$, on définit $d(x,y) = N_p(x-y)$ avec $N_p(n) = p^{-v_p(n)}$ où $v_p(n)$ désigne le plus grand entier k tel que de p^k divise n lorsque $n \neq 0$; et $N_p(0) = 0$.

1) Justifier que $(\mathbb{Z}, d)$ est un espace métrique.

2) Justifier que la suite $x_m = 1 + p + \cdots + p^m$ (où $m \geqslant 1$) est de Cauchy dans $(\mathbb{Z}, d)$.

3) Est-ce que $(\mathbb{Z}, d)$ est complet ?

Exercice 1.8

Lemme de Baire et conséquences.

1) E désigne un espace vectoriel normé. Deux joueurs, Pierre et Paul jouent au jeu suivant: Pierre choisit un ouvert U_1 non vide de E, puis Paul choisit un ouvert non vide V_1 inclus dans U_1, puis Pierre choisit un ouvert non vide U_2 inclus dans V_1 et ainsi de suite. A la fin de la partie, les deux joueurs ont ainsi défini deux suites décroissantes d'ouverts non vides (U_n) et (V_n)) telles que pour tout $n \geqslant 1$,

$$U_{n+1} \subset V_n \subset U_n$$

a) Montrer que $\bigcap_{n \geqslant 1} U_n = \bigcap_{n \geqslant 1} V_n$.

Notons U cet ensemble. Pierre a gagné la partie si U est vide et Paul si U n'est pas vide. On dit que l'un des joueurs a une stratégie gagnante s'il a une méthode lui permettant de gagner quelle que soit la façon de jouer de son adversaire. Ainsi, il est impossible que les deux joueurs aient chacun une stratégie gagnante. Par contre, il n'est pas certain a priori que l'un des deux joueurs en ait une.

b) On suppose que l'espace E est une réunion dénombrable de fermés F_n d'intérieur vide. Montrer que Pierre a une stratégie gagnante. Indication: Pierre commence à jouer $U_1 = E$ et à chaque choix V_n de Paul, Pierre répond $V_n \backslash F_n$.

c) Montrer que si E est complet, alors Paul a une stratégie gagnante. Indication: on pourra utiliser le théorème des fermés emboités.

2) En déduire qu'un espace de Banach ne peut pas être égal à une réunion de fermés d'intérieur vide.

3) Montrer qu'un espace de Banach n'admet pas de base (algébrique) dénombrable. (Indication : par l'absurde : on utilisera Baire avec $F_n = vect\{e_1, \cdots, e_n\}$)

2 Suites de fonctions

Exercice 2.1

On définit pour $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$: $\quad f_n(x) = \dfrac{(x+1)^{2n+1} + (x-1)^{2n+1}}{(x+1)^{2n+1} - (x-1)^{2n+1}}$.

1) Justifier que ces fonctions sont bien définies et qu'elles sont impaires. Pour $n \in \mathbb{N}$, que vaut $\lim\limits_{t \to +\infty} f_n(t)$?

2) Pour tout $x > 0$, comparer $f_n(x)$ et $f_n\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

3) Montrer que cette suite de fonctions converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers une fonction f que l'on précisera.

4) Justifier qu'il ne peut pas y avoir convergence uniforme sur un intervalle (non réduit à un point) contenant 0.

5) Justifier qu'il ne peut pas y avoir convergence uniforme sur un intervalle de la forme $[A, +\infty[$ (où $A > 0$).

6) On fixe $A > a > 0$. Montrer qu'il y a convergence uniforme sur $[a, A]$. On pourra d'abord traiter les cas $[a, 1]$ (avec $0 < a < 1$) et $[1, A]$ (avec $1 < A$).

Exercice 2.2

On définit pour $x \in]-\pi, +\pi[$ et $n \geqslant 1$: $\quad f_n(x) = \dfrac{\sin^2(nx)}{n \sin(x)}$ lorsque $x \neq 0$ et $f_n(0) = 0$.

1) Justifier que ces fonctions sont bien définies et qu'elles sont impaires.

2) Montrer que cette suite de fonctions converge simplement sur $]-\pi, \pi[$ vers la fonction nulle.

On fixe $0 < a < A < \pi$.

3) Montrer qu'il y a convergence uniforme sur $[a, A]$.

4) Justifier qu'il ne peut pas y avoir convergence uniforme sur $]0, A]$. Y a-t-il convergence uniforme sur $[0, A]$?

5) Y a-t-il convergence uniforme sur $[a, \pi[$?

Exercice 2.3

On définit pour $x \in \mathbb{R}$ et $n \geqslant 1$: $\quad f_n(x) = \left(1 + \dfrac{x}{n}\right)^n$.

1) Montrer que cette suite de fonctions converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers une fonction (bien connue!) que l'on précisera.

2) Justifier qu'il ne peut pas y avoir convergence uniforme sur $\mathbb{R}^+$. Est-ce possible sur $\mathbb{R}$? Sur $\mathbb{R}^-$?

3) Montrer qu'il y a convergence uniforme sur tout segment.

Exercice 2.4

Soit f une fonction continue sur $[0,1]$ à valeurs dans $[0,1]$. On définit la suite de fonctions suivantes

$$f_0 = Id_{[0,1]} \qquad \text{et} \quad \text{pour } n \geqslant 1, \qquad f_n = f \circ \cdots \circ f \quad n \text{ fois}$$

On suppose que cette suite converge simplement vers fonction nulle sur $[0,1]$.

On veut montrer qu'il y a en fait convergence uniforme.

1) Justifier que f admet au moins un point fixe. Démontrer qu'en fait 0 est le seul point fixe de f.

2) En déduire que l'on a soit "$\forall x \in]0,1]\,,\ f(x) < x$" soit "$\forall x \in]0,1]\,,\ f(x) > x$".

3) Justifier que l'on est nécessairement dans le premier cas.

On fixe $\varepsilon > 0$.

4) Justifier l'existence $M = \max\limits_{x\in[\varepsilon,1]} \dfrac{f(x)}{x}\cdot$ Comparer M et 1.

5) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in [0,1]$, on a $f_n(x) \leqslant \max\big(\varepsilon, M^n\big)$.

6) Conclure.

Exercice 2.5

Théorème de Dini. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite croissante de fonctions continues définies sur un compact $K \subset \mathbb{R}$. On suppose qu'il y a convergence simple vers une fonction f, continue sur K.

On va montrer qu'en fait il y a convergence uniforme.

Soit $\varepsilon > 0$. On définit les parties $F_n = \Delta_n^{-1}([\varepsilon, +\infty[)$ où $\Delta_n = f - f_n : K \to \mathbb{R}$.

1) Justifier que F_n est une partie fermée de K et que $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} F_n = \varnothing$.

2) En déduire qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant n_0$: $F_n = \varnothing$.

3) Conclure.

4) Application: retrouver une preuve pour la question 3. dans l'exercice 3.3.

Exercice 2.6

Une application classique de Dini. On définit pour $x \in [0,1]$ et $n \in \mathbb{N}$, la suite de fonctions polynômes suivantes: $P_0 = 0$ et pour $n \in \mathbb{N}$

$$P_{n+1}(x) = P_n(x) + \frac{1}{2}\big[x - P_n^2(x)\big].$$

1) Montrer que cette suite de fonctions converge simplement sur $[0,1]$ vers la racine carrée. Pour cela on pourra

a) Montrer que pour tout $x \in [0,1]$ et $n \in \mathbb{N}$, on a $0 \leqslant P_n(x) \leqslant \sqrt{x}$.

b) Montrer que $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

c) Conclure.

2) Montrer qu'il y a convergence uniforme sur $[0,1]$.

Exercice 2.7

Soit $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions polynômes, uniformément convergente sur $\mathbb{R}$. On veut montrer que nécessairement la limite est un polynôme.

1) Écrire le critère de Cauchy uniforme.

2) En déduire qu'à partir d'un certain rang N, les polynômes P_n et P_N diffèrent d'une constante.

3) Conclure.

Exercice 2.8

Théorème de Weierstrass. Polynômes de Bernstein.

On fixe une fonction f, continue sur $[0,1]$. Pour $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geqslant 1$, on définit le polynôme

$$B_n(X) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f\Big(\frac{k}{n}\Big) X^k (1-X)^{n-k}.$$

1) Calculer B_n lorsque f vaut 1, lorsque f est l'identité puis lorsque $f(x) = x^2$.

2) En déduire que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (k-nX)^2 X^k (1-X)^{n-k} = nX(1-X)$.

Pour $\delta > 0$, $n \geqslant 1$ et $x \in [0,1]$, on note $A_n(x,\delta)$ l'ensemble $\Big\{k \in \{0,\dots,n\} \;\Big|\; \Big|\frac{k}{n} - x\Big| \geqslant \delta\Big\}$.

3) Montrer que

$$\sum_{k\in A_n(x,\delta)} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \leqslant \frac{1}{4n\delta^2}\cdot$$

4) Montrer que

$$|f(x) - B_n(x)| \leqslant \sup_{k\notin A_n(x,\delta)} \Big|f\Big(\frac{k}{n}\Big) - f(x)\Big| + \frac{\|f\|_\infty}{2n\delta^2}\cdot$$

5) Conclure que la suite de polynômes $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur $[0,1]$.

Exercice 2.9

On s'intéresse à la valeur de l'intégrale du sinus cardinal sur $\mathbb{R}^+$: $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\,dt$.

1) Justifier que la fonction sinus cardinal définie sur $\mathbb{R}$ par $S(t) = \dfrac{\sin(t)}{t}$ pour $t \neq 0$ et $S(0) = 1$ est continue sur $\mathbb{R}$, et bornée.

2) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^{+*}$: $\quad F(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} S(t)\mathrm{e}^{-xt}\,dt$ est bien défini.

3) Justifier que $\displaystyle\int_0^{+\infty} S(t)\,dt$ est bien défini (on pourra utiliser un théorème d'Abel vu en S.I.). On posera donc $F(0) = I$.

On considère la suite de fonctions définie pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}^+$ par

$$f_n(x) = \int_0^{n} S(t)\mathrm{e}^{-xt}\,dt$$

4) Cette suite de fonctions converge-t-elle simplement sur $\mathbb{R}^+$? Si oui vers quelle fonction ?

5) On fixe des entiers $m \geqslant n \geqslant 1$.

a) Pour $x \in \mathbb{R}^+$, comparer $f_m(x) - f_n(x)$ et $\displaystyle\int_n^m \frac{1}{t} \mathrm{e}^{(-x+i)t}\, dt$.

b) A l'aide d'une intégration par partie, montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^+$:

$$\left| \int_n^m \frac{1}{t} \mathrm{e}^{(-x+i)t}\, dt \right| \leqslant \frac{3}{n}\cdot$$

c) En déduire que la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $\mathbb{R}^+$.

d) En déduire que F est continue sur $\mathbb{R}^+$.

e) Montrer que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} F(x) = 0$.

6) Montrer que, pour $n \in \mathbb{N}$, f_n est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^+$ et que pour tout $x \geqslant 0$:

$$f_n'(x) = \frac{-1 + \mathrm{e}^{-nx}\big(x \sin(n) + \cos(n)\big)}{x^2+1}\cdot$$

7) En déduire que la suite de fonctions $(f_n')_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur tout intervalle $[a, +\infty[$ (avec $a > 0$). En déduire que F est dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$ et donner une expression de F' sur $\mathbb{R}^{+*}$.

8) En déduire la valeur de F sur $\mathbb{R}^{+*}$ puis de I.

3 Séries de fonctions

Exercice 3.1

On définit pour $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$: $\quad f_n(x) = \mathrm{e}^{-n^2 x}$.

1) Montrer que la série de fonctions de terme général f_n converge simplement sur $\mathbb{R}^{+*}$. On notera S la somme ainsi définie sur $\mathbb{R}^{+*}$.

2) Montrer que cette série de fonctions converge normalement sur tout intervalle $]a, +\infty[$ où $a > 0$.

3) Montrer qu'il n'y a pas convergence uniforme sur $]0, \alpha)$ où $\alpha > 0$.

4) En déduire que S est continue sur $\mathbb{R}^{+*}$.

5) Montrer que la limite de S en $+\infty$ existe et vaut 1.

6) Quelle est la limite de S en 0^+?

7) Montrer que S est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^{+*}$ et donner une expression de la dérivée sous forme d'une série.

Exercice 3.2

Fonction zêta de Riemann.

Pour $n \geqslant 1$ et $z \in \mathbb{C}$, on définit $f_n(z) = n^{-z} = \mathrm{e}^{-z\ln(n)}$.

1) Montrer que la série de fonctions de terme f_n converge normalement sur tout domaine $\{z \in \mathbb{C} \mid Re(z) > a\}$ où $a > 1$.

Pour $x > 1$, on définit donc $\zeta(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$.

2) Montrer que ζ est continue sur $]1, +\infty[$.

3) Montrer que ζ est $\mathscr{C}^1$ sur $]1, +\infty[$ et donner une expression de la dérivée.

Exercice 3.3

On définit pour $x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{N}$ et $n \in \mathbb{N}$: $\quad f_n(x) = \dfrac{1}{(x-n)^2}$.

1) Montrer que la série de fonctions de terme général f_n converge simplement sur $\mathbb{R}\backslash\mathbb{N}$. On notera S la somme ainsi définie sur $\mathbb{R}\backslash\mathbb{N}$.

2) Soit K un segment inclus dans $\mathbb{R}\backslash\mathbb{N}$. Montrer que la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} f_n$ converge normalement sur K. Même question en remplaçant K par $]-\infty, -1]$.

3) En déduire que S est continue sur $\mathbb{R}\backslash\mathbb{N}$.

4) Montrer que la limite de S en $-\infty$ est nulle.

5) Montrer que pour tout x dans $\mathbb{R}^+\backslash\mathbb{N}$, on a $S(x) \geqslant 4$.

6) Donner un équivalent de S au voisinage de 0.

7) Montrer que S est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}\backslash\mathbb{N}$ et donner une expression de la dérivée sous forme d'une série.

Exercice 3.4

On définit pour $x \in \mathbb{R}^+$ et $n \in \mathbb{N}$: $\quad f_n(x) = \dfrac{(-1)^n x^n \mathrm{e}^{-x}}{n!}\cdot$

1) Montrer que la série de fonctions de terme général f_n converge simplement vers une fonction que l'on précisera.
Pour la suite de cet exercice, on rappelle la formule de Stirling: $n! \sim \sqrt{2\pi n}\,\mathrm{e}^{-n} n^n$.

2) À $n \in \mathbb{N}$ fixé, déterminer $\sup\limits_{x \geqslant 0} x^n \mathrm{e}^{-x}$.

3) Montrer que la convergence n'est pas normale.

4) Montrer que la convergence est uniforme sur $\mathbb{R}^+$.

Exercice 3.5

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels décroissante vers 0. Montrer l'équivalence entre

(i) La série de fonctions $\sum a_n \sin(nx)$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$

et

(ii) La suite $(na_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.

Indications: pour $(i) \Rightarrow (ii)$, on pourra considérer une somme pour $n \in \{N, \dots, 2N\}$ et l'évaluation en $\pi/2N$. On se souviendra aussi que $\sin(x) \geqslant \dfrac{2}{\pi}x$ lorsque $x \in [0, \pi/2]$.

Exercice 3.6

Une fonction continue sur $\mathbb{R}$ mais nulle part dérivable.

1) Soit $\left(\varepsilon_{k,n}\right)_{(k,n)\in\mathbb{N}^2}$ des choix de signes, i.e. $\forall k, n \in \mathbb{N}, \quad \varepsilon_{k,n} \in \{-1, +1\}$. À n fixé, on note p_n le nombre de $+1$ parmi les $\varepsilon_{k,n}$ où $0 \leqslant k \leqslant n$.

On considère $s_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \varepsilon_{k,n}$.

a) Montrer que $s_n = 2p_n - (n+1)$ puis que $\left|s_{n+1} - s_n\right|$ est un entier impair.

b) En déduire que la suite $\left(s_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge.

2) Dans cette question uniquement, on considère une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ dérivable en $\ell \in I$. On suppose que l'on a deux suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$, convergentes vers ℓ, telles que $a_n \leqslant \ell \leqslant b_n$ pour tout $n \geqslant 1$.

Montrer que la suite $\left(\dfrac{f(b_n) - f(a_n)}{b_n - a_n}\right)_{n\geqslant 1}$ est convergente vers $f'(\ell)$.

3) On va montrer qu'il existe des fonctions continues sur $\mathbb{R}$ mais nulle part dérivable. On commence par définir la fonction $\Delta : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ pour $x \in \mathbb{R}$ par

$$\Delta(x) = \text{distance}(x, \mathbb{Z}) = \min\{|x - n|;\ n \in \mathbb{Z}\}$$

a) Dessiner le graphe de Δ et déterminer l'image de Δ.

b) Montrer que Δ est 1-lipschitzienne.

c) Soient $A, s \in \mathbb{N}$ avec $s \geqslant 1$.

Montrer que Δ est affine sur tous les intervalles $[A2^{-s}, (A+1)2^{-s}]$. On précisera la pente (en valeur absolue).

4) Soit $x \in \mathbb{R}$. Montrer que la série $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Delta\big(2^k x\big)}{2^k}$ converge.

Dans toute la suite de cette partie, la fonction T est définie par $T(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Delta\big(2^k x\big)}{2^k}$ où $x \in \mathbb{R}$.

5) Démontrer que T est continue sur $\mathbb{R}$.

6) Montrer que T est périodique et donner une période.

7) On fixe $\alpha \in \mathbb{R}$.

a) Montrer que pour tout entier $n \geqslant 1$, il existe deux rationnels a_n et b_n, respectivement de la forme $\dfrac{q}{2^n}$ et $\dfrac{q+1}{2^n}$ (avec $q \in \mathbb{Z}$), vérifiant $a_n \leqslant \alpha < b_n$.

b) Les suites $(a_n)_{n\geqslant 1}$ et $(b_n)_{n\geqslant 1}$ sont-elles convergentes ? Si oui, vers quelle limite ?

c) Que vaut $\Delta\big(2^k b_n\big) - \Delta\big(2^k a_n\big)$ pour $k \geqslant n$?

d) On fixe $0 \leqslant k < n$ des entiers. Montrer que $\Delta\big(2^k b_n\big) - \Delta\big(2^k a_n\big) \in \{\pm 2^{k-n}\}$.

e) En déduire que la suite $\left(\dfrac{T(b_n) - T(a_n)}{b_n - a_n}\right)_{n\geqslant 1}$ est divergente puis que T n'est pas dérivable en α.

8) Conclure.

Exercice 3.7

1) Justifier que $F(x) = \displaystyle\int_0^1 t^{xt}\, dt$ est bien défini pour $x \in \mathbb{R}$.

2) Pour $n, m \in \mathbb{N}$, montrer que $\displaystyle\int_0^1 t^m \big(\ln(t)\big)^n\, dt = (-1)^n \frac{n!}{(m+1)^{n+1}}\cdot$

3) Montrer que $F(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^n}{(n+1)^{n+1}}\cdot$

Exercice 3.8

Pour $x \in]-1,+1[$, on considère $F(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n \sin(nx)}{n}\cdot$

1) Montrer que $F(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n \sin(nx)}{n}$ est bien défini et de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]-1,+1[$.

2) Montrer que pour $x \in]-1,+1[$, on a $F'(x) = \dfrac{\sin(x) + x\cos(x) - x^2}{1 - 2x\cos(x) + x^2}\cdot$

3) En déduire que $F(x) = \arctan\left(\dfrac{x\sin(x)}{1 - x\cos(x)}\right)$ pour $x \in]-1,+1[$.

4) En déduire les valeurs de $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(n)}{n}$ et de $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{\sin(n)}{n}\cdot$ *Indication: on pourra utiliser le th. d'Abel uniforme.*

Exercice 3.9

On fixe un paramètre $a \in \mathbb{R}$ et on considère la suite de fonctions suivantes, pour $x \in \mathbb{R}^+$ et $n \in \mathbb{N}$:

$$f_n(x) = \mathrm{e}^{-(n+1)x} \sin(ax).$$

1) Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(ax)}{\mathrm{e}^x - 1}\, dx$ est bien définie.

2) Montrer que, à $\alpha > 0$ fixé, la série de fonctions de terme général f_n converge normalement sur l'intervalle $[\alpha, +\infty[$ vers une fonction que l'on précisera.

3) Soient $\beta > \alpha > 0$. Justifier que $\displaystyle\int_\alpha^\beta \frac{\sin(ax)}{\mathrm{e}^x - 1}\, dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_\alpha^\beta \mathrm{e}^{-(n+1)x} \sin(ax)\, dx.$

4) On fixe α et on note, pour $n \in \mathbb{N}$, $u_n(\beta) = \displaystyle\int_\alpha^\beta \mathrm{e}^{-(n+1)x} \sin(ax)\, dx.$

a) Montrer que la série de fonctions (u_n) converge normalement sur $[\alpha, +\infty[$.

b) En déduire que $\displaystyle\int_\alpha^{+\infty} \frac{\sin(ax)}{\mathrm{e}^x - 1}\, dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_\alpha^{+\infty} \mathrm{e}^{-(n+1)x} \sin(ax)\, dx.$

5) On note, pour $n \in \mathbb{N}$, $v_n(\alpha) = \displaystyle\int_\alpha^{+\infty} \mathrm{e}^{-(n+1)x} \sin(ax)\, dx.$

a) Pour $n \in \mathbb{N}$, montrer que $v_n(\alpha) = \dfrac{(n+1)\sin(\alpha a) + a\cos(\alpha a)}{(n+1)^2 + a^2}\, \mathrm{e}^{-(n+1)\alpha}.$

b) Conclure que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(ax)}{\mathrm{e}^x - 1}\, dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a}{(n+1)^2 + a^2}.$

4 Séries entières

Exercice 4.1

Déterminer le rayon de convergence des séries entières suivantes

a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{3n^2+17n+5}{n+5} z^n$

b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} n(-2)^{n+1} z^n$

c) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \big(2+\cos(n)\big) z^n$

d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^n}{n!} z^n$

e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \Big(\cos(1/n)\Big)^{n^\alpha} z^n$, où $\alpha \in \mathbb{R}$.

f) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} e^n z^{n^2}$

g) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} n! z^{n^2}$

h) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \big(1+\frac{(-1)^n}{n}\big)^{n^2} z^n$.

i) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \big(\sin(\pi\sqrt{2}n)\big)^n z^n$.

Exercice 4.2

Déterminer le rayon de convergence et la somme des séries entières suivantes

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} n^2 x^n$

b) $\displaystyle\sum_{n=a+1}^{+\infty} \frac{1}{n-a} x^n$ où $a \in \mathbb{N}$.

c) $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{n}{n^2-1} x^n$

d) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2n+1} x^n$.

e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos\big(2n\pi/3\big)}{n} x^n$

f) La série entière associée à la suite $w_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \Big(\cos(t)\Big)^n \, dt$.

Exercice 4.3

Développer en série entière les fonctions suivantes (on précisera le domaine de définition et le rayon de convergence) :

a) $f(z) = \dfrac{1}{z-a}$ avec $a \in \mathbb{C}^*$.

b) $f(z) = \dfrac{1}{1+z+z^2}$.

c) $f(z) = \dfrac{z \sin a}{z^2 - 2(\cos a)z + 1}$ avec $a \in \mathbb{R}$.

d) $f(z) = \dfrac{1}{(1-z)(1-z^3)}$.

e) $f(x) = \ln\Big(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}\Big)$. (*Indication: on pourra commencer par dériver cette fonction*)

f) $f(x) = \dfrac{\arcsin(x)}{\sqrt{1-x^2}}$. (*Indication: on pourra commencer par dériver cette fonction et montrer que cette fonction est solution d'une équation différentielle simple*)

Exercice 4.4

Prouver que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $ch(x) \leqslant e^{x^2/2}$.

Exercice 4.5

Soit $f(z) = \displaystyle\sum_{n \geqslant 0} u_n z^n$ une série entière de rayon de convergence infini. On suppose que :

$$\exists k \in \mathbb{N},\ \exists a, b > 0,\ \forall z \in \mathbb{C},\ |f(z)| \leqslant a|z|^k + b.$$

On veut montrer que f est un polynôme.

a) Soient $r > 0$ et $n \in \mathbb{N}$. Que vaut $\displaystyle\int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{-int} f(re^{it}) \, dt$?

b) Montrer que u_n est nul pour $n > k$ et conclure.

Exercice 4.6

Développer en série entière sur $\mathbb{R}$: $f(x) = e^{-\frac{x^2}{2}} \displaystyle\int_0^x e^{\frac{t^2}{2}} dt$.

Indication : on peut montrer que f vérifie une équation différentielle simple.

Exercice 4.7

On considère la série entière $f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n(2n+1)} x^{2n+1}$.

1) Quel est son rayon de convergence, que l'on notera R ?

2) Sur quel intervalle la fonction f est-elle continue? Démontrer qu'elle est en réalité continue sur $[-R,R]$.

3) Exprimer, au moyen des fonctions usuelles, la somme de la série dérivée sur $]-R,R[$. En déduire une expression de f sur $]-R,R[$.

4) Calculer $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n(2n+1)}$.

Exercice 4.8

On considère la série entière $f(x)=\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n(n-1)}x^n$.

1) Déterminer l'intervalle de convergence de f: on déterminera le rayon de convergence R et on précisera s'il y a convergence en R et $-R$.

2) *Calcul de f.*

a) *Première méthode.* En remarquant que $\dfrac{1}{n(n-1)}=\dfrac{1}{n-1}-\dfrac{1}{n}$, exprimer $f(x)$ avec des fonctions usuelles sur l'intervalle $]-R,R[$.

b) *Autre méthode.*

(i) Démontrer que f est continue sur son intervalle de convergence.

(ii) Exprimer f', puis f, à l'aide de fonctions usuelles sur l'intervalle $]-R,R[$.

3) Déduire des questions précédentes la valeur de $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2}\frac{(-1)^n}{n(n-1)}$.

Exercice 4.9

Soient deux suites $(a_n)_{n\geqslant 0}$ et $(b_n)_{n\geqslant 0}$ avec $b_n>0$ et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lambda\neq 0$. On suppose que $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}b_nx^n$ est de rayon de convergence 1 et divergente en 1.

1) Montrer que $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^n$ est de rayon de convergence 1.

2) Montrer que $\displaystyle\lim_{x\to 1^-}\sum_{n=0}^{+\infty}b_nx^n=+\infty$.

3) Montrer que $\displaystyle\lim_{x\to 1^-}\frac{\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^n}{\sum_{n=0}^{+\infty}b_nx^n}=\lambda$. *Indication: faire un raisonnement "à la Cesàro".*

Exercice 4.10

On s'intéresse à une série entière $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^n$ de rayon de convergence 1, de somme $f(x)$, telle que $\displaystyle\lim_{x\to 1^-}f(x)$ existe (on note ℓ cette limite).

La question est de savoir si la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}a_n$ converge (et vers quoi)...

1) En considérant $a_n = (-1)^n$ (pour tout $n \in \mathbb{N}$), montrer que, en général, la réponse est non.

2) On suppose dans cette question seulement que $a_n \geqslant 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

a) Soit $N \in \mathbb{N}$, montrer que $\ell \geqslant \sum_{n=0}^{N} a_n$.

b) En déduire que la série $\sum_{n\geqslant 0} a_n$ converge.

c) Conclure

3) *Théorème de Tauber.* On suppose désormais que $\lim_{n\to+\infty} na_n = 0$.

a) Pour $N \in \mathbb{N}$, on pose $x_N = 1 - \dfrac{1}{N+1}\cdot$ Établir

$$\begin{aligned}\left|f\left(x_N\right) - \sum_{n=0}^{N} a_n\right| &\leqslant \left|\sum_{n=0}^{N} a_n\left(x_N^n - 1\right)\right| + \left|\sum_{n=N+1}^{+\infty} a_n x_N^n\right| \\ &\leqslant \frac{1}{N+1}\sum_{n=0}^{N} n\left|a_n\right| + \sup_{n\geqslant N+1}\left|na_n\right| \sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{x_N^n}{n}.\end{aligned}$$

b) Conclure.

Exercice 4.11

Théorème de Bernstein pour les séries entières.

On fixe $A > 0$. Soit $f :]-A, A[\longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^\infty$. On suppose que

$$\forall k \in \mathbb{N}\,, \quad \forall x \in]-A, A[\qquad f^{(2k)}(x) \geqslant 0.$$

On veut montrer que f est développable en série entière.

On considère la fonction $F(x) = f(x) + f(-x)$ où $x \in]-A, A[$.

1) Justifier que F est de classe $\mathscr{C}^\infty$ et que: $\forall k \in \mathbb{N}\,, \forall x \in]-A, A[\,, \quad F^{(2k+1)}(0) = 0$ et $F^{(2k)}(0) \geqslant 0$.

2) Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer qu'il existe un polynôme P_n de degré $2n$ (que l'on précisera) tel que

$$\forall x \in]-A, A[\,, \qquad F(x) = P_n(x) + R_n(x)$$

avec $R_n(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{(x-t)^{2n+1}}{(2n+1)!} F^{(2n+2)}(t)\,dt$

3) On fixe $a \in]0, A[$.

a) Montrer que pour tout $x \in [0, a[$, on a

$$0 \leqslant R_n(x) \leqslant \left(\frac{x}{a}\right)^{(2n+1)} R_n(a) \leqslant \left(\frac{x}{a}\right)^{(2n+1)} F(a).$$

b) En déduire que F est développable en série entière sur $]-A, A[$.

4) Soit $x \in]-A, A[$.

a) Justifier la validité de l'écriture $f(x) = Q_{2n+1}(x) + r_n(x)$
avec $r_n(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{(x-t)^{2n+1}}{(2n+1)!} f^{(2n+2)}(t)\,dt$ et $Q_n(x) = \displaystyle\sum_{j=0}^{n} \frac{f^{(j)}(0)}{j!} x^j$.

b) Montrer que $|r_n(x)| \leqslant R_n(|x|)$ puis que $\lim\limits_{x\to+\infty} r_n(x) = 0$.

c) Conclure.

5) Appliquer ce théorème à la fonction $x \to \tan(x)$.

Exercice 4.12

Soit $f(z) = \sum\limits_{n\geqslant 0} a_n z^n$ développable en série entière (avec un rayon de convergence strictement positif). On suppose de plus que $a_0 \neq 0$. On veut prouver que la fonction $1/f$ est développable en série entière.

1) On suppose que $\dfrac{1}{f} = \sum\limits_{n\geqslant 0} b_n z^n$, avec rayon de convergence ρ strictement positif. Quelle relation de récurrence vérifie la suite (b_n)?

2) Soit (b_n) la suite définie par la relation de récurrence précédente. Montrer qu'il existe $C > 0$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$|b_n| \leqslant \frac{C^n}{|a_0|}.$$

3) En déduire que $1/f$ est développable en série entière.

Exercice 4.13

Soit $f(z) = \sum\limits_{n\geqslant 0} a_n z^n$ développable en série entière. On suppose que la suite $(a_n)_{n\geqslant 0}$ est périodique. Montrer que f est en fait une fraction rationnelle.

Exercice 4.14

On se propose dans cet exercice de calculer $\sum\limits_{n\geqslant 0} \dfrac{1}{(3n)!}$.

Pour cela, on introduit

$$S(x) = \sum_{n\geqslant 0} \frac{x^{3n}}{(3n)!}.$$

Comme d'habitude, on note $j = e^{2i\pi/3}$.

a) Calculer $1 + j^k + j^{2k}$ pour tout entier $k \in \mathbb{N}$.

b) En déduire le développement en série entière de $e^x + e^{jx} + e^{j^2 x}$.

c) En déduire $S(x)$, puis la valeur de la somme $\sum\limits_{n\geqslant 0} \dfrac{1}{(3n)!}$.

Exercice 4.15

Soit (u_n) la suite réelle définie par $u_0 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} u_k u_{n-k} \,.$$

1) Montrer qu'il existe $C > 0$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant u_n \leqslant \dfrac{C^n}{(n+1)^2}$.

2) Montrer que la série entière $f(x) = \sum_{n \geqslant 0} u_n x^n$ a un rayon de convergence strictement positif $r > 0$.

3) Démontrer que, pour tout $x \in]-r, -r[$, on a $xf^2(x) - f(x) + 1 = 0$.

4) En déduire qu'il existe $\rho > 0$ tel que pour tout x non nul dans $]-\rho, \rho[$, on a

$$f(x) = \frac{1 - \sqrt{1-4x}}{2x}.$$

5) En déduire u_n en fonction de n.

Exercice 4.16

On veut montrer que $\displaystyle\int_0^1 \ln(x)\ln(1-x)\,dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)^2}$.

1) Justifier que la fonction $x \in]0,1[\mapsto \ln(x)\ln(1-x)$ se prolonge par continuité à $[0,1]$ (en une fonction que l'on notera f) et en déduire l'existence de $\displaystyle\int_0^1 \ln(x)\ln(1-x)\,dx$.

Pour tout entier $n \geqslant 1$, on définit $u_n(x) = \dfrac{1}{n} x^n \ln(x)$ pour $x \in]0,1]$ et $u_n(0) = 0$.

2) Montrer que la série de fonctions de termes u_n converge simplement sur $[0,1]$ et que sa somme veut $-f$.

3) Montrer que la série de fonctions de termes u_n converge normalement sur $[0,1]$.

4) Pour tout entier $n \geqslant 1$, calculer $\displaystyle\int_0^1 x^n \ln(x)\,dx$.

5) Conclure. On pourra enfin calculer la somme en utilisant $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

Exercice 4.17

Pour tous les entiers k et n tels que $n \geqslant 1$ et $0 \leqslant k \leqslant n$, on note $D_{n,k}$ le nombre de bijections (ou permutations) s de l'ensemble $\{1, \ldots, n\}$ ayant k points fixes, c'est à dire telles que

$$k = \text{card}\big\{i \in \{1, \ldots, n\};\ s(i) = i\big\}.$$

On pose $D_{0,0} = 1$ et $d_n = D_{n,0}$ désigne le nombre de dérangements, c'est à dire de permutations sans point fixe.

1) Dresser la liste de toutes les permutations de $\{1,2,3\}$ et en déduire la valeur de $D_{3,0}$, $D_{3,1}$, $D_{3,2}$ et $D_{3,3}$.

2) Montrer que $n! = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} D_{n,k}$.

3) Montrer que $D_{n,k} = \dbinom{n}{k} D_{n-k,0}$.

4) Montrer que la série entière $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{d_n}{n!} z^n$ a un rayon de convergence supérieur ou égal à 1.

5) On pose $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{d_n}{n!} x^n$. Montrer que $\mathrm{e}^x f(x) = \dfrac{1}{1-x}$ pour $|x| < 1$.

6) En déduire que $d_n = n! \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$.

7) Soit p_n la probabilité pour qu'une permutation prise au hasard soit un dérangement. Quelle est la limite de p_n quand n tend vers $+\infty$?

Exercice 4.18

On rappelle qu'une involution de $\{1,\dots,n\}$ est une application s de $\{1,\dots,n\}$ dans $\{1,\dots,n\}$ telle que $s \circ s(k) = k$ pour tout $k \in \{1,\dots,n\}$. On note I_n le nombre d'involutions de $\{1,\dots,n\}$ et on convient que $I_0 = 1$.

1) Démontrer que, si $n \geqslant 1$, alors

a) $I_{n+1} = I_n + nI_{n-1}$. *Indication: on pourra commencer par justifier que si E est un ensemble de cardinal n alors I_n est aussi le cardinal de $\{s : E \to E |\ s \circ s = Id_E\}$. Puis on partionnera suivant les images de $s(n+1)$.*

b) $I_n \leqslant n!$

2) Démontrer que la série entière de coefficients $a_n = \dfrac{I_n}{n!}$ a un rayon de convergence supérieur ou égal à 1.

On note S la somme: $\quad \forall x \in]-1,1[, \quad S(x) = \displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{I_n}{n!} x^n$.

3) Justifier que, pour tout $x \in]-1,1[$, on a $S'(x) = (1+x)S(x)$.

4) En déduire une expression de $S(x)$ en fonction de x. *Indication: on pourra s'intéresser à la dérivée de $x \mapsto S(x) \exp\big(-\frac{1}{2}(1+x)^2\big)$.*

5) En déduire une expression de I_n.

Exercice 4.19

Chercher des solutions développables en série entière de l'équation

$$(1+x^2)y'' - 2y = 0$$

On exhibera notamment deux telles solutions indépendantes.

En fait (on l'admettra) que toute solution de l'équation différentielle est alors combinaison linéaire de ces deux solutions.

Exercice 4.20

Théorème Taubérien de Hardy-Littlewood. On s'intéresse à une série entière $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ de rayon de convergence 1, de somme $f(x)$, telle que $\lim_{x \to 1^-} f(x)$ existe (et on notera ℓ cette limite).

La question est de savoir si la série $\sum_{n \geqslant 0} a_n$ converge.

On suppose ici que la suite $\big(na_n\big)_n$ est bornée (en fait, on ne va utiliser que la condition $na_n \geqslant -C$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, où $C > 0$).

1) Montrer que pour tout polynôme P, on a $\lim_{x \to 1^-} \sum_{n=0}^{+\infty} a_n P(x^n)$ existe et vaut $P(1)\ell$.

Soit q la fonction indicatrice de l'intervalle $\left[\frac{1}{e}, 1\right]$.

2) On veut montrer que $\limsup_{x \to 1^-} \sum_{n=0}^{+\infty} a_n q(x^n)$ est majoré par ℓ.

Soit $\varepsilon > 0$. On considère la fonction $h(t) = \dfrac{q(t) - t}{t(1-t)}$ pour $t \in]0, 1[$.

a) Montrer que l'on peut prolonger h par continuité en 0 et en 1. Quel est le seul point de discontinuité de h (sur $[0, 1]$) ?

b) Justifier l'existence d'un polynôme H vérifiant $H \geqslant h$ sur $]0, 1[$ et

$$\int_0^1 \Big(H(t) - h(t)\Big)\, dt \leqslant \varepsilon.$$

Soit P le polynôme $P(X) = X + X(1 - X)H(X)$. Noter que $P \geqslant q$ sur $[0, 1]$.

c) On pose $\Phi(t) = \dfrac{P(t) - q(t)}{(1-t)}$ pour $t \in]0, 1[$.

(i) Montrer que, pour tout $x \in]0, 1[$, on a

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n q(x^n) - \sum_{n=0}^{+\infty} a_n P(x^n) \leqslant C(1 - x) \sum_{n=1}^{+\infty} \Phi(x^n).$$

(ii) Montrer que $\lim_{x \to 1^-} (1 - x) \sum_{n=1}^{+\infty} \Phi(x^n)$ existe et vaut $\int_0^1 \frac{1}{t} \Phi(t)\, dt \leqslant \varepsilon$.

d) Conclure.

3) Montrer que de même on a $\liminf_{x \to 1^-} \sum_{n=0}^{+\infty} a_n q(x^n) \geqslant \ell$ et conclure.

5 Séries de Fourier

Exercice 5.1

Dans tout cet exercice les fonctions sont 2π-périodiques.
Développer en série de Fourier les fonctions f suivantes définies par:
1) $f(x) = \cos(2x)$ pour $x \in \mathbb{R}$.
2) $f(x) = x$ pour $x \in]-\pi, \pi]$.
3) $f(x) = -1$ pour $x \in]-\pi, 0]$ et $f(x) = +1$ pour $x \in]0, \pi]$.
4) $f(x) = |x|$ pour $x \in [-\pi, \pi]$.
5) $f(x) = x^2$ pour $x \in [-\pi, \pi]$.
6) $f(x) = x^2$ pour $x \in]0, 2\pi]$.

En déduire les valeurs de

$$\sum_{n\geqslant 0} \frac{1}{(2n+1)^2} \qquad \sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^2} \qquad \sum_{n\geqslant 0} \frac{1}{(2n+1)^4} \qquad \sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^4}.$$

Exercice 5.2

Soient $a \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}$ et $f(t) = \exp(iat)$ pour $t \in [-\pi, \pi[$, prolongée par 2π-périodicité.
Calculer les coefficients de Fourier de f puis montrer que

$$\pi\text{cotan}(\pi a) = \frac{1}{a} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{}{2a} a^2 - n^2.$$

En faisant un D.L. en $a = 0$ à l'ordre 3 de $\text{cotan}(\pi a) - \dfrac{1}{\pi a}$, en déduire les sommes

$$\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^2} \qquad \sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^4}.$$

Exercice 5.3

Développer en série de Fourier la fonction 2π-périodique $t \mapsto |\sin(t)|$.

Exercice 5.4

Soient f la fonction 2π-périodique qui coincide avec la fonction indicatrice de $[-1, 1]$ sur $[-\pi, \pi[$.
1) Développer f en série de Fourier.
2) En déduire la convergence et les valeurs de

$$\sum_{n\geqslant 1} \frac{\sin(n)}{n} \qquad \sum_{n\geqslant 1} \left(\frac{\sin(n)}{n}\right)^2$$

Exercice 5.5

Justifier que pour tout $n \in \mathbb{Z}$ et toute fonction h continue par morceaux et 2π-périodique, on a

$$\left|\widehat{h}(n)\right| \leqslant \int_0^{2\pi} |h(x)| \frac{dx}{2\pi} \leqslant \left(\int_0^{2\pi} |h(x)|^2 \frac{dx}{2\pi}\right)^{1/2}.$$

Exercice 5.6

Soient f et g continues par morceaux et 2π-périodiques.

On veut montrer que $\widehat{f * g}(n) = \widehat{f}(n).\widehat{g}(n)$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$.

1) Le montrer lorsque g est un polynôme trigonométrique.

2) Conclure.

Exercice 5.7

Soient f et g continues sur $\mathbb{R}$ et 2π-périodiques. On veut montrer que

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^{2\pi} f(x)g(nx) \frac{dx}{2\pi} = \left(\int_0^{2\pi} f(x) \frac{dx}{2\pi}\right).\left(\int_0^{2\pi} g(x) \frac{dx}{2\pi}\right)$$

1) Établir le résultat pour g polynôme trigonométrique.

2) Conclure.

Exercice 5.8

Inégalité de Bernstein. Soit P un polynôme trigonométrique de degré $N \geqslant 1$. On veut montrer que

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} \left|P'(x)\right| \leqslant N \sup_{x\in\mathbb{R}} \left|P(x)\right|.$$

On écrit $P = \sum_{k=-N}^{N} c_k \mathrm{e}_k$.

1) Soit $F(t) = P\left(\frac{\pi t}{2N}\right)$ où $t \in \mathbb{R}$. Quelle inégalité cherche-t-on à montrer en terme de F et F' ?

2) On considère la fonction triangle Δ définie par $\Delta(x) = x$ pour $x \in \left]-\pi/2, +\pi/2\right]$, par $\Delta(x) = \pi - x$ pour $x \in \left]+\pi/2, +3\pi/2\right]$ et qui est 2π-périodique.

a) Développer Δ en série de Fourier.

b) Justifier que pour tout $k \in \mathbb{Z}$ avec $|k| \leqslant N$, on a

$$\frac{k\pi}{2N} = \lim_{m\to+\infty} \sum_{n=-m}^{m} \widehat{\Delta}(n) \mathrm{e}_n\left(\frac{\pi k}{2N}\right)$$

3) En déduire que $\sup_{t\in\mathbb{R}} \left|F'(t)\right| \leqslant M \sup_{t\in\mathbb{R}} \left|F(t)\right|$ avec $M = \lim_{m\to+\infty} \sum_{n=-m}^{m} \left|\widehat{\Delta}(n)\right|$.

4) Conclure

Exercice 5.9

Théorème de Bernstein. Soit f une fonction Höldérienne d'ordre α avec $\alpha > 1/2$ i.e.

$$\sup\left\{\frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|^\alpha};\ x \neq y\right\} < \infty.$$

1) En notant $f_x(t) = f(x+t)$ où $x, t \in \mathbb{R}$, calculer $\widehat{f_x}(n)$ en fonction de $\hat{f}(n)$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$.

2) On veut montrer qu'il existe $C > 0$ tel que pour tout $j \in \mathbb{N}$, on a

$$C2^{-2j\alpha} \geqslant \sum_{2^j+1 \leqslant |n| \leqslant 2^{j+1}} |\hat{f}(n)|^2.$$

a) Soit $x \in \mathbb{R}$.

(i) Exprimer $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \left|f_x(t) - f(t)\right|^2 dt$ à l'aide des coefficients de Fourier de f.

(ii) En utilisant la propriété Höldérienne de f, montrer qu'il existe $c > 0$ tel que pour tout $j \in \mathbb{N}$

$$c.x^{2\alpha} \geqslant \sum_{2^j+1 \leqslant |n| \leqslant 2^{j+1}} |\hat{f}(n)|^2 \sin^2\big(nx/2\big).$$

b) Conclure en choisissant judicieusement une valeur de x dans la question a.

3) Montrer que les séries de terme général $\left|\hat{f}(n)\right|$ et $\left|\hat{f}(-n)\right|$ convergent.

Exercice 5.10

Inégalité isopérimétrique. Soit Γ un arc de Jordan dans $\mathbb{C}$ de classe C^1 par morceaux (continue fermée sans point double) et de longueur L enfermant une surface d'aire S.

Alors on veut montrer que

$$L^2 \geqslant 4\pi S$$

et que l'on a égalité uniquement dans le cas d'un cercle.

On peut supposer $L = 2\pi$ (pourquoi ?) et on paramètre Γ par l'abscisse curviligne s (donc $\Gamma = \{(x(s), y(s))|\ s \in [0, 2\pi]\}$). On peut aussi supposer $\hat{x}(0) = 0$ (pourquoi ?).

a) Exprimer S et $L(= 2\pi)$ en fonction d'intégrales simples de la variable s (on pourra utiliser la formule de Green-Riemann pour exprimer S).

b) Etablir l'inégalité d'Hürwitz : soit f une fonction de classe C^1 sur $[0, 2\pi]$ à valeurs complexes. Alors

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(x)|^2 dx - \left|\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)dx\right|^2 \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f'(x)|^2 dx.$$

On étudiera le cas d'égalité.

c) Conclure (Indication : on minorera $L^2 - 4\pi S$ par 0 en étudiant le cas d'égalité).

Exercice 5.11

Equation de la chaleur (cas d'une barre finie). On considère une fonction h C^1 sur $]0,\pi[$. On cherche à trouver u, définie sur $[0,\pi]\times\mathbb{R}^+$ et C^2 sur $]0,\pi[\times]0,+\infty[$, telle que

$$u(0,t)=u(\pi,t)=0 \ \text{ pour } t\geqslant 0 \qquad u(x,0)=h(x) \text{ pour } x\in]0,\pi[$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0 \ \text{ dans }]0,\pi[\times]0,+\infty[.$$

1) On va d'abord montrer que les solutions à variables séparées : $u(x,t)=f(x)g(t)$ de l'équation de la chaleur $\frac{\partial u}{\partial t}-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0$ dans $]0,\pi[\times]0,+\infty[$ avec $u(0,t)=u(\pi,t)=0$ pour $t>0$ sont de la forme

$$u_n(x,t)=c_n\sin(nx).\mathrm{e}^{-n^2t}$$

où $n\geqslant 1$ et $c_n\in\mathbb{R}$.

On suppose que u n'est pas identiquement nulle (la fonction nulle est clairement solution ici).

a) Justifier que les fonctions f et g sont chacune solutions d'une équation différentielle: $f''=\lambda f$ et $g'=\lambda g$ où λ est un réel.

b) Résoudre ces équations différentielles et exploiter $u(0,t)=u(\pi,t)=0$ pour justifier la forme de λ.

2) Résoudre le problème de la chaleur. *Indication : on "prolongera" d'une part h en une fonction impaire 2π-périodique sur $\mathbb{R}$. D'autre part, on utilisera la méthode de superposition, i.e. on sommera la famille de solutions obtenues au a. Ainsi on cherche une solution sous la forme*

$$\sum_{n=1}^{+\infty}c_n\sin(nx).\mathrm{e}^{-n^2t}$$

3) Pour $x\in]0,\pi[$, montrer que $\lim\limits_{t\to0^+}u(x,t)=h(x)$ et que $\lim\limits_{t\to+\infty}u(x,t)=0$.