# Licence Mathématiques

# Exercices ANALYSE 4

TD LM2
Pascal Lefèvre

# 1 Révisions : Uniforme continuité - Intégration

**Exercice 1.1**

1) Soit $I = (u, v)$ un intervalle (non trivial) de $\mathbb{R}$. On considère une fonction uniformément continue de $I$ dans $\mathbb{R}^d$ (muni d'une norme $\|.\|$).

On veut montrer qu'il existe $a, b > 0$ tel que, pour tout $x \in I$, on a

$$\|f(x)\| \leqslant a|x| + b.$$

On fixe $\alpha \in I$.

a) Justifier qu'il existe $\eta \in ]0, v - u[$ tel que pour tous $t, t' \in I$ avec $|t - t'| \leqslant \eta$ : $\|f(t) - f(t')\| \leqslant 1$.

b) Montrer que pour tout entier $k \in \mathbb{N}$ tel que $\alpha + k\eta \in I$, on a $\|f(\alpha + k\eta) - f(\alpha)\| \leqslant k$.

c) Montrer que pour tout entier $k \in \mathbb{Z}$ tel que $\alpha + k\eta \in I$, on a

$$\|f(\alpha + k\eta)\| \leqslant |k| + \|f(\alpha)\|.$$

d) Soit $x \in I$, justifier qu'il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $\alpha + k\eta \in I$ et $|x - (\alpha + k\eta)| \leqslant \eta$.

e) Conclure.

2) Soit $P$ une fonction polynomiale (non nulle). Montrer que $P$ est uniformément continue sur un sous-intervalle non borné de $\mathbb{R}$ si et seulement si son degré est au plus 1.

**Exercice 1.2**

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite croissante vers $+\infty$ de réels positifs telle que $\big(a_{n+1} - a_n\big)_{n\in\mathbb{N}}$ soit bornée. On considère une fonction uniformément continue de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}^d$ (muni d'une norme $\|.\|$). On suppose que

$$\forall x \in \mathbb{R}^+, \quad \lim_{n\to+\infty} f(a_n + x) = 0$$

On veut montrer que $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t) = 0$.

On fixe $\varepsilon > 0$ et on note $M = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} \big(a_{n+1} - a_n\big) > 0$.

a) Justifier qu'il existe un entier $p \geqslant 1$ tel que pour tous $t, t' \in \mathbb{R}^+$ avec $|t - t'| \leqslant M/p$ : $\|f(t) - f(t')\| \leqslant \varepsilon$.

b) Soit $t \geqslant a_0$.

(i) Justifier l'existence de $n_t = \max\{k \in \mathbb{N} \mid a_k \leqslant t\}$, puis que $a_{n_t} \leqslant t < a_{n_t} + M$.

(ii) Montrer que $n_t$ tend vers l'infini lorsque $t$ vers l'infini.

(iii) Justifier l'existence de $i = \max\left\{j \in \mathbb{N} \,|\, 0 \leqslant j \leqslant p \text{ et } a_{n_t} + j\frac{M}{p} \leqslant t\right\}$ et vérifier que $i < p$.

(iv) En déduire que $a_{n_t} + i\frac{M}{p} \leqslant t < a_{n_t} + (i + 1)\frac{M}{p}$.

c) Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} \sup\limits_{0\leqslant j\leqslant p} \big\|f(a_n + jM/p)\big\| = 0$.

d) Conclure.

**Exercice 1.3**

On considère une fonction uniformément continue de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}^d$. On suppose que

$$\forall x \in \mathbb{R}^+ , \quad \lim_{n\to+\infty} f(nx) \quad \text{existe}$$

Montrer que $\lim_{t\to+\infty} f(t)$ existe.

**Exercice 1.4**

Soit $f$ une fonction continue sur $\mathbb{R}^+$, à valeurs réelles, telle que $\int_0^{+\infty} f(t)\, dt$ converge.

1) Donner un exemple de telle fonction qui n'est pas bornée. Cette fonction admet-elle une limite nulle en l'infini ?

2) Montrer que si on suppose que $\lim_{t\to+\infty} f(t)$ existe alors cette limite est nulle.

3) On suppose que $f$ est uniformément continue. Montrer que $\lim_{t\to+\infty} f(t) = 0$.

**Exercice 1.5**

Déterminer les limites des suites suivantes (justifier au passage leur existence), définies pour $n \geqslant 1$ :

1) $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{n+k}{n^2+k^2}$.

2) $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{n^2\sqrt[3]{n^3+k^3}}$.

3) $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n^2} \sin\left(\frac{k\pi}{n+1}\right)$.

4) $P_n = \displaystyle\frac{1}{n}\prod_{k=1}^{n}\Big(n+k\Big)^{1/n}$.

5) $P_n = \displaystyle\left[\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k}{n}\right)^k\right]^{1/n^2}$.

**Exercice 1.6**

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}^d$ une fonction continue par morceaux (avec $a < b$). On pose, pour $n \geqslant 1$ :

$$I_n = \int_a^b f(t)\big|\sin(nt)\big|\, dt$$

On veut montrer que

$$(**) \qquad \lim_{n\to+\infty} I_n = \frac{2}{\pi}\int_a^b f(t)\, dt$$

1) Soient deux réels $A$ et $B$ tels que $A < B$. On considère deux entiers $p, q$ dans $\mathbb{Z}$ tels que $p\pi \leqslant A < (p+1)\pi$ et $(q-1)\pi < B \leqslant q\pi$.

a) Justifier que l'on peut effectivement définir deux entiers $p$ et $q$ comme ceci et que $p \leqslant q$.

b) Montrer que $\displaystyle\int_{p\pi}^{q\pi} \big|\sin(x)\big|\,dx = 2(q-p)$.

c) En déduire que $\displaystyle\Big|\int_A^B \big|\sin(x)\big|\,dx - \frac{2}{\pi}(B-A)\Big| \leqslant 8$.

2) Établir $(**)$ lorsque $f$ est la fonction indicatrice d'un sous-intervalle de $[a,b]$, puis lorsque $f$ est une fonction en escalier.

3) Conclure.

**Exercice 1.7**

En vous inspirant des idées de l'exercice précédent, montrer le lemme de Riemann-Lebesgue :

Si $f : [a,b] \to \mathbb{R}^d$ est une fonction continue par morceaux (avec $a < b$) alors

$$\lim_{n\to+\infty} \int_a^b f(t)\sin(nt)\,dt = \lim_{n\to+\infty} \int_a^b f(t)\cos(nt)\,dt = 0$$

# 2 Intégrales à paramètre

### Exercice 2.1

Etudier (domaine, continuité, dérivabilité) les fonctions suivantes :

1) $F(x) = \displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{1}{\sqrt{1 + x\cos(t)}}\,dt$

2) $F(x) = \displaystyle\int_0^1 t^{xt}\,dt$

### Exercice 2.2

On considère la fonction $f(x) = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos\big(x\cos(t)\big)\,dt$.

1) Montrer que $f$ est définie sur $\mathbb{R}$.

2) Montrer que $f$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer sa dérivée.

3) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$ : $\quad f(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{\cos(xu)}{\sqrt{1-u^2}}\,du.$

4) Soit $a \in ]0,1[$.

a) Justifier que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \int_0^a \frac{\cos(xu)}{\sqrt{1-u^2}}\,du = 0$. (*Indication : faire une I.P.P.*)

b) Montrer que $\displaystyle\left|\int_a^1 \frac{\cos(xu)}{\sqrt{1-u^2}}\,du\right| \leqslant \arccos(a)$.

c) Conclure que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

### Exercice 2.3

Soit $f$ une fonction $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ telle que $f(0) = 0$. Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $Q(x) = \dfrac{f(x)}{x}$ si $x$ non nul et $Q(0) = f'(0)$.

1) Justifier que pour tout $x \in \mathbb{R}$ : $Q(x) = \displaystyle\int_0^1 f'(xu)\,du$.

2) Montrer que $Q$ est $\mathscr{C}^\infty$ et préciser la dérivée $n^{ieme}$ de $Q$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Comparer $Q^{(n)}(0)$ et $f^{(n+1)}(0)$.

3) Appliquer ceci au cas de $f = \sin$.

# 3 Suites de fonctions

**Exercice 3.1**

On définit pour $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$ : $\quad f_n(x) = \dfrac{(x+1)^{2n+1} + (x-1)^{2n+1}}{(x+1)^{2n+1} - (x-1)^{2n+1}}$.

1) Justifier que ces fonctions sont bien définies et qu'elles sont impaires. Pour $n \in \mathbb{N}$, que vaut $\lim\limits_{t \to +\infty} f_n(t)$ ?

2) Pour tout $x > 0$, comparer $f_n(x)$ et $f_n\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

3) Montrer que cette suite de fonctions converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers une fonction $f$ que l'on précisera.

4) Justifier qu'il ne peut pas y avoir convergence uniforme sur un intervalle (non réduit à un point) contenant 0.

5) Justifier qu'il ne peut pas y avoir convergence uniforme sur un intervalle de la forme $[A, +\infty[$ (où $A > 0$).

6) On fixe $A > a > 0$. Montrer qu'il y a convergence uniforme sur $[a, A]$. On pourra d'abord traiter les cas $[a, 1]$ (avec $0 < a < 1$) et $[1, A]$ (avec $1 < A$).

**Exercice 3.2**

On définit pour $x \in ]-\pi, +\pi[$ et $n \geqslant 1$ : $\quad f_n(x) = \dfrac{\sin^2(nx)}{n \sin(x)}$ lorsque $x \neq 0$ et $f_n(0) = 0$.

1) Justifier que ces fonctions sont bien définies et qu'elles sont impaires.

2) Montrer que cette suite de fonctions converge simplement sur $]-\pi, \pi[$ vers la fonction nulle.

On fixe $0 < a < A < \pi$.

3) Montrer qu'il y a convergence uniforme sur $[a, A]$.

4) Justifier qu'il ne peut pas y avoir convergence uniforme sur $]0, A]$. Y a-t-il convergence uniforme sur $[0, A]$ ?

5) Y a-t-il convergence uniforme sur $[a, \pi[$ ?

**Exercice 3.3**

On définit pour $x \in \mathbb{R}$ et $n \geqslant 1$ : $\quad f_n(x) = \left(1 + \dfrac{x}{n}\right)^n$.

1) Montrer que cette suite de fonctions converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers une fonction (bien connue !) que l'on précisera.

2) Justifier qu'il ne peut pas y avoir convergence uniforme sur $\mathbb{R}^+$. Est-ce possible sur $\mathbb{R}$ ? Sur $\mathbb{R}^-$ ?

3) Montrer qu'il y a convergence uniforme sur tout segment.

**Exercice 3.4**

Soit $f$ une fonction continue sur $[0,1]$ à valeurs dans $[0,1]$. On définit la suite de fonctions suivantes

$$f_0 = Id_{[0,1]} \qquad \text{et} \quad \text{pour } n \geqslant 1, \qquad f_n = f \circ \cdots \circ f \quad n \text{ fois}$$

On suppose que cette suite converge simplement vers fonction nulle sur $[0,1]$.

On veut montrer qu'il y a en fait convergence uniforme.

1) Justifier que $f$ admet au moins un point fixe. Démontrer qu'en fait 0 est le seul point fixe de $f$.

2) En déduire que l'on a soit "$\forall x \in ]0,1]\,,\ f(x) < x$" soit "$\forall x \in ]0,1]\,,\ f(x) > x$".

3) Justifier que l'on est nécessairement dans le premier cas.

On fixe $\varepsilon > 0$.

4) Justifier l'existence $M = \max\limits_{x\in[\varepsilon,1]} \dfrac{f(x)}{x}\cdot$ Comparer $M$ et 1.

5) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in [0,1]$, on a $f_n(x) \leqslant \max\big(\varepsilon, M^n\big)$.

6) Conclure.

**Exercice 3.5**

*Théorème de Dini.* Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite croissante de fonctions continues définies sur un compact $K \subset \mathbb{R}$. On suppose qu'il y a convergence simple vers une fonction $f$, continue sur $K$.

On va montrer qu'en fait il y a convergence uniforme.

Soit $\varepsilon > 0$. On définit les parties $F_n = \Delta_n^{-1}([\varepsilon, +\infty[)$ où $\Delta_n = f - f_n : K \to \mathbb{R}$.

1) Justifier que $F_n$ est une partie fermée de $K$ et que $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} F_n = \varnothing$.

2) En déduire qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant n_0$ : $F_n = \varnothing$.

3) Conclure.

4) Application : retrouver une preuve pour la question 3. dans l'exercice 3.3.

**Exercice 3.6**

Une application classique de Dini. On définit pour $x \in [0,1]$ et $n \in \mathbb{N}$, la suite de fonctions polynômes suivantes : $P_0 = 0$ et pour $n \in \mathbb{N}$

$$P_{n+1}(x) = P_n(x) + \frac{1}{2}\big[x - P_n^2(x)\big].$$

1) Montrer que cette suite de fonctions converge simplement sur $[0,1]$ vers la racine carrée. Pour cela on pourra

a) Montrer que pour tout $x \in [0,1]$ et $n \in \mathbb{N}$, on a $0 \leqslant P_n(x) \leqslant \sqrt{x}$.

b) Montrer que $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

c) Conclure.

2) Montrer qu'il y a convergence uniforme sur $[0,1]$.

**Exercice 3.7**

Soit $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions polynômes, uniformément convergente sur $\mathbb{R}$. On veut montrer que nécessairement la limite est un polynôme.

1) Écrire le critère de Cauchy uniforme.

2) En déduire qu'à partir d'un certain rang $N$, les polynômes $P_n$ et $P_N$ diffèrent d'une constante.

3) Conclure.

**Exercice 3.8**

*Théorème de Weierstrass. Polynômes de Bernstein.*

On fixe une fonction $f$, continue sur $[0,1]$. Pour $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geqslant 1$, on définit le polynôme

$$B_n(X) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f\left(\frac{k}{n}\right) X^k (1-X)^{n-k}.$$

1) Calculer $B_n$ lorsque $f$ vaut 1, lorsque $f$ est l'identité puis lorsque $f(x) = x^2$.

2) En déduire que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (k-nX)^2 X^k (1-X)^{n-k} = nX(1-X)$.

Pour $\delta > 0$, $n \geqslant 1$ et $x \in [0,1]$, on note $A_n(x,\delta)$ l'ensemble $\left\{k \in \{0,\dots,n\} \,\middle|\, \left|\frac{k}{n} - x\right| \geqslant \delta\right\}$.

3) Montrer que

$$\sum_{k\in A_n(x,\delta)} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \leqslant \frac{1}{4n\delta^2}.$$

4) Montrer que

$$|f(x) - B_n(x)| \leqslant \sup_{k\notin A_n(x,\delta)} \left|f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x)\right| + \frac{\|f\|_\infty}{2n\delta^2}.$$

5) Conclure que la suite de polynômes $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers $f$ sur $[0,1]$.

**Exercice 3.9**

On s'intéresse à la valeur de l'intégrale du sinus cardinal sur $\mathbb{R}^+$ : $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\, dt$.

1) Justifier que la fonction sinus cardinal définie sur $\mathbb{R}$ par $S(t) = \dfrac{\sin(t)}{t}$ pour $t \neq 0$ et $S(0) = 1$ est continue sur $\mathbb{R}$, et bornée.

2) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^{+*}$ : $\quad F(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} S(t)\mathrm{e}^{-xt}\, dt$ est bien défini.

3) Justifier que $\displaystyle\int_0^{+\infty} S(t)\, dt$ est bien défini (on pourra utiliser un théorème d'Abel vu en S.I.). On posera donc $F(0) = I$.

On considère la suite de fonctions définie pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}^+$ par

$$f_n(x) = \int_0^{n} S(t)\mathrm{e}^{-xt}\, dt$$

4) Cette suite de fonctions converge-t-elle simplement sur $\mathbb{R}^+$ ? Si oui vers quelle fonction ?

5) On fixe des entiers $m \geqslant n \geqslant 1$.

a) Pour $x \in \mathbb{R}^+$, comparer $f_m(x) - f_n(x)$ et $\displaystyle\int_n^m \frac{1}{t}\mathrm{e}^{(-x+i)t}\,dt$.

b) A l'aide d'une intégration par partie, montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^+$ :

$$\left|\int_n^m \frac{1}{t}\mathrm{e}^{(-x+i)t}\,dt\right| \leqslant \frac{3}{n}.$$

c) En déduire que la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $\mathbb{R}^+$.

d) En déduire que $F$ est continue sur $\mathbb{R}^+$.

e) Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = 0$.

6) Montrer que, pour $n \in \mathbb{N}$, $f_n$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^+$ et que pour tout $x \geqslant 0$ :

$$f_n'(x) = \frac{-1 + \mathrm{e}^{-nx}\big(x\sin(n) + \cos(n)\big)}{x^2+1}.$$

7) En déduire que la suite de fonctions $(f_n')_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur tout intervalle $[a, +\infty[$ (avec $a > 0$). En déduire que $F$ est dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$ et donner une expression de $F'$ sur $\mathbb{R}^{+*}$.

8) En déduire la valeur de $F$ sur $\mathbb{R}^{+*}$ puis de $I$.

# 4 Séries de fonctions

**Exercice 4.1**

On définit pour $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$ : $\quad f_n(x) = \mathrm{e}^{-n^2 x}$.

1) Montrer que la série de fonctions de terme général $f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}^{+*}$. On notera $S$ la somme ainsi définie sur $\mathbb{R}^{+*}$.

2) Montrer que cette série de fonctions converge normalement sur tout intervalle $[a, +\infty[$ où $a > 0$.

3) Montrer qu'il n'y a pas convergence uniforme sur $]0, \alpha)$ où $\alpha > 0$.

4) En déduire que $S$ est continue sur $\mathbb{R}^{+*}$.

5) Montrer que la limite de $S$ en $+\infty$ existe et vaut 1.

6) Quelle est la limite de $S$ en $0^+$ ?

7) Montrer que $S$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^{+*}$ et donner une expression de la dérivée sous forme d'une série.

**Exercice 4.2**

*Fonction zêta de Riemann.*

Pour $n \geqslant 1$ et $z \in \mathbb{C}$, on définit $f_n(z) = n^{-z} = \mathrm{e}^{-z\ln(n)}$.

1) Montrer que la série de fonctions de terme $f_n$ converge normalement sur tout domaine $\{z \in \mathbb{C} \mid Re(z) \geqslant a\}$ où $a > 1$.

Pour $x > 1$, on définit donc $\zeta(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$.

2) Montrer que $\zeta$ est continue sur $]1, +\infty[$.

3) Montrer que $\zeta$ est $\mathscr{C}^1$ sur $]1, +\infty[$ et donner une expression de la dérivée.

**Exercice 4.3**

On définit pour $x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{N}$ et $n \in \mathbb{N}$ : $\quad f_n(x) = \dfrac{1}{(x-n)^2}$.

1) Montrer que la série de fonctions de terme général $f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}\backslash\mathbb{N}$. On notera $S$ la somme ainsi définie sur $\mathbb{R}\backslash\mathbb{N}$.

2) Soit $K$ un segment inclus dans $\mathbb{R}\backslash\mathbb{N}$. Montrer que la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} f_n$ converge normalement sur $K$. Même question en remplaçant $K$ par $]-\infty, -1]$.

3) En déduire que $S$ est continue sur $\mathbb{R}\backslash\mathbb{N}$.

4) Montrer que la limite de $S$ en $-\infty$ est nulle.

5) Montrer que pour tout $x$ dans $\mathbb{R}^+\backslash\mathbb{N}$, on a $S(x) \geqslant 4$.

6) Donner un équivalent de $S$ au voisinage de 0.

7) Montrer que $S$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}\backslash\mathbb{N}$ et donner une expression de la dérivée sous forme d'une série.

**Exercice 4.4**

On définit pour $x \in \mathbb{R}^+$ et $n \in \mathbb{N}$ : $\quad f_n(x) = \dfrac{(-1)^n x^n \mathrm{e}^{-x}}{n!}$.

1) Montrer que la série de fonctions de terme général $f_n$ converge simplement vers une fonction que l'on précisera.
Pour la suite de cet exercice, on rappelle la formule de Stirling : $n! \sim \sqrt{2\pi n}\,\mathrm{e}^{-n} n^n$.

2) À $n \in \mathbb{N}$ fixé, déterminer $\sup\limits_{x \geqslant 0} x^n \mathrm{e}^{-x}$.

3) Montrer que la convergence n'est pas normale.

4) Montrer que la convergence est uniforme sur $\mathbb{R}^+$.

**Exercice 4.5**

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels décroissante vers 0. Montrer l'équivalence entre

(i) La série de fonctions $\sum a_n \sin(nx)$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$

et

(ii) La suite $(na_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.

Indications : pour $(i) \Rightarrow (ii)$, on pourra considérer une somme pour $n \in \{N, \dots, 2N\}$ et l'évaluation en $\pi/2N$. On se souviendra aussi que $\sin(x) \geqslant \dfrac{2}{\pi}x$ lorsque $x \in [0, \pi/2]$.

**Exercice 4.6**

*Une fonction continue sur $\mathbb{R}$ mais nulle part dérivable.*

1) Soit $\left(\varepsilon_{k,n}\right)_{(k,n)\in\mathbb{N}^2}$ des choix de signes, i.e. $\forall k, n \in \mathbb{N}, \quad \varepsilon_{k,n} \in \{-1, +1\}$. À $n$ fixé, on note $p_n$ le nombre de $+1$ parmi les $\varepsilon_{k,n}$ où $0 \leqslant k \leqslant n$.

On considère $s_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \varepsilon_{k,n}$.

a) Montrer que $s_n = 2p_n - (n+1)$ puis que $\left|s_{n+1} - s_n\right|$ est un entier impair.

b) En déduire que la suite $\left(s_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge.

2) Dans cette question uniquement, on considère une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ dérivable en $\ell \in I$. On suppose que l'on a deux suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$, convergentes vers $\ell$, telles que $a_n \leqslant \ell \leqslant b_n$ pour tout $n \geqslant 1$.

Montrer que la suite $\left(\dfrac{f(b_n) - f(a_n)}{b_n - a_n}\right)_{n\geqslant 1}$ est convergente vers $f'(\ell)$.

3) On va montrer qu'il existe des fonctions continues sur $\mathbb{R}$ mais nulle part dérivable. On commence par définir la fonction $\Delta : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ pour $x \in \mathbb{R}$ par

$$\Delta(x) = \text{distance}(x, \mathbb{Z}) = \min\{|x-n|;\ n \in \mathbb{Z}\}$$

a) Dessiner le graphe de $\Delta$ et déterminer l'image de $\Delta$.

b) Montrer que $\Delta$ est 1-lipschitzienne.

c) Soient $A, s \in \mathbb{N}$ avec $s \geqslant 1$.

Montrer que $\Delta$ est affine sur tous les intervalles $[A2^{-s}, (A+1)2^{-s}]$. On précisera la pente (en valeur absolue).

4) Soit $x \in \mathbb{R}$. Montrer que la série $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Delta\left(2^k x\right)}{2^k}$ converge.

Dans toute la suite de cette partie, la fonction $T$ est définie par $T(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Delta\left(2^k x\right)}{2^k}$ où $x \in \mathbb{R}$.

5) Démontrer que $T$ est continue sur $\mathbb{R}$.

6) Montrer que $T$ est périodique et donner une période.

7) On fixe $\alpha \in \mathbb{R}$.

a) Montrer que pour tout entier $n \geqslant 1$, il existe deux rationnels $a_n$ et $b_n$, respectivement de la forme $\dfrac{q}{2^n}$ et $\dfrac{q+1}{2^n}$ (avec $q \in \mathbb{Z}$), vérifiant $a_n \leqslant \alpha < b_n$.

b) Les suites $(a_n)_{n\geqslant 1}$ et $(b_n)_{n\geqslant 1}$ sont-elles convergentes ? Si oui, vers quelle limite ?

c) Que vaut $\Delta\left(2^k b_n\right) - \Delta\left(2^k a_n\right)$ pour $k \geqslant n$ ?

d) On fixe $0 \leqslant k < n$ des entiers. Montrer que $\Delta\left(2^k b_n\right) - \Delta\left(2^k a_n\right) \in \{\pm 2^{k-n}\}$.

e) En déduire que la suite $\left(\dfrac{T(b_n) - T(a_n)}{b_n - a_n}\right)_{n\geqslant 1}$ est divergente puis que $T$ n'est pas dérivable en $\alpha$.

8) Conclure.

**Exercice 4.7**

1) Justifier que $F(x) = \displaystyle\int_0^1 t^{xt}\, dt$ est bien défini pour $x \in \mathbb{R}$.

2) Pour $n, m \in \mathbb{N}$, montrer que $\displaystyle\int_0^1 t^m \left(\ln(t)\right)^n dt = (-1)^n \frac{n!}{(m+1)^{n+1}}$.

3) Montrer que $F(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^n}{(n+1)^{n+1}}$.

**Exercice 4.8**

Pour $x \in ]-1, +1[$, on considère $F(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n \sin(nx)}{n}$.

1) Montrer que $F(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n \sin(nx)}{n}$ est bien défini et de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]-1, +1[$.

2) Montrer que pour $x \in ]-1, +1[$, on a $F'(x) = \dfrac{\sin(x) + x\cos(x) - x^2}{1 - 2x\cos(x) + x^2}$.

3) En déduire que $F(x) = \arctan\left(\dfrac{x\sin(x)}{1 - x\cos(x)}\right)$ pour $x \in ]-1, +1[$.

4) En déduire les valeurs de $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(n)}{n}$ et de $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{\sin(n)}{n}$. *Indication : on pourra utiliser le th. d'Abel uniforme.*

**Exercice 4.9**

On fixe un paramètre $a \in \mathbb{R}$ et on considère la suite de fonctions suivantes, pour $x \in \mathbb{R}^+$ et $n \in \mathbb{N}$ :

$$f_n(x) = \mathrm{e}^{-(n+1)x} \sin(ax).$$

1) Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(ax)}{\mathrm{e}^x - 1}\, dx$ est bien définie.

2) Montrer que, à $\alpha > 0$ fixé, la série de fonctions de terme général $f_n$ converge normalement sur l'intervalle $[\alpha, +\infty[$ vers une fonction que l'on précisera.

3) Soient $\beta > \alpha > 0$. Justifier que $\displaystyle\int_\alpha^\beta \frac{\sin(ax)}{\mathrm{e}^x - 1}\, dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_\alpha^\beta \mathrm{e}^{-(n+1)x} \sin(ax)\, dx.$

4) On fixe $\alpha$ et on note, pour $n \in \mathbb{N}$, $u_n(\beta) = \displaystyle\int_\alpha^\beta \mathrm{e}^{-(n+1)x} \sin(ax)\, dx.$

a) Montrer que la série de fonctions $(u_n)$ converge normalement sur $[\alpha, +\infty[$.

b) En déduire que $\displaystyle\int_\alpha^{+\infty} \frac{\sin(ax)}{\mathrm{e}^x - 1}\, dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_\alpha^{+\infty} \mathrm{e}^{-(n+1)x} \sin(ax)\, dx.$

5) On note, pour $n \in \mathbb{N}$, $v_n(\alpha) = \displaystyle\int_\alpha^{+\infty} \mathrm{e}^{-(n+1)x} \sin(ax)\, dx.$

a) Pour $n \in \mathbb{N}$, montrer que $v_n(\alpha) = \dfrac{(n+1)\sin(\alpha a) + a\cos(\alpha a)}{(n+1)^2 + a^2}\, \mathrm{e}^{-(n+1)\alpha}.$

b) Conclure que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(ax)}{\mathrm{e}^x - 1}\, dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a}{(n+1)^2 + a^2}.$

# 5 Séries entières

### Exercice 5.1

Déterminer le rayon de convergence des séries entières suivantes

a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{3n^2+17n+5}{n+5} z^n$

b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} n(-2)^{n+1} z^n$

c) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \big(2+\cos(n)\big) z^n$

d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^n}{n!} z^n$

e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \Big(\cos(1/n)\Big)^{n^\alpha} z^n$, où $\alpha \in \mathbb{R}$.

f) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} e^n z^{n^2}$

g) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} n! z^{n^2}$

h) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \big(1+\frac{(-1)^n}{n}\big)^{n^2} z^n$.

i) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \big(\sin(\pi\sqrt{2}n)\big)^n z^n$.

### Exercice 5.2

Déterminer le rayon de convergence et la somme des séries entières suivantes

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} n^2 x^n$

b) $\displaystyle\sum_{n=a+1}^{+\infty} \frac{1}{n-a} x^n$ où $a \in \mathbb{N}$.

c) $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{n}{n^2-1} x^n$

d) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2n+1} x^n$.

e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos\big(2n\pi/3\big)}{n} x^n$

f) La série entière associée à la suite $w_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \Big(\cos(t)\Big)^n \, dt$.

**Exercice 5.3**

Développer en série entière les fonctions suivantes (on précisera le domaine de définition et le rayon de convergence) :

a) $f(z) = \dfrac{1}{z-a}$ avec $a \in \mathbb{C}^*$.

b) $f(z) = \dfrac{1}{1+z+z^2}$.

c) $f(z) = \dfrac{z \sin a}{z^2 - 2(\cos a)z + 1}$ avec $a \in \mathbb{R}$.

d) $f(z) = \dfrac{1}{(1-z)(1-z^3)}$.

e) $f(x) = \ln\Big(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}\Big)$. (*Indication : on pourra commencer par dériver cette fonction*)

f) $f(x) = \dfrac{\arcsin(x)}{\sqrt{1-x^2}}$. (*Indication : on pourra commencer par dériver cette fonction et montrer que cette fonction est solution d'une équation différentielle simple*)

**Exercice 5.4**

Prouver que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $ch(x) \leqslant e^{x^2/2}$.

**Exercice 5.5**

Soit $\displaystyle\sum_{n \geqslant 0} u_n z^n$ une série entière de rayon de convergence infini. On suppose que :

$$\exists k \in \mathbb{N},\ \exists a, b > 0,\ \forall z \in \mathbb{C},\ |f(z)| \leqslant a|z|^k + b.$$

On veut montrer que $f$ est un polynôme.

a) Soient $r > 0$ et $n \in \mathbb{N}$. Que vaut $\displaystyle\int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{-int} f(re^{it})\, dt$ ?

b) Montrer que $u_n$ est nul pour $n > k$ et conclure.

**Exercice 5.6**

Développer en série entière sur $\mathbb{R}$ : $f(x) = e^{-\frac{x^2}{2}} \displaystyle\int_0^x e^{\frac{t^2}{2}} dt$.

*Indication : on peut montrer que $f$ vérifie une équation différentielle simple.*

**Exercice 5.7**

Soit $u_n = \dfrac{(-1)^{n-1}}{n}$ pour $n \geqslant 1$.

1) Montrer que la série $\sum u_n$ converge.

2) On veut calculer la somme de cette série.

a) Pour $x \in [0,1[$, que vaut $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} u_n x^n$ ?

b) En déduire $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$, en utilisant un théorème d'Abel du cours.

**Exercice 5.8**

On considère la série entière $f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n(2n+1)} x^{2n+1}$.

1) Quel est son rayon de convergence, que l'on notera $R$ ?

2) Sur quel intervalle la fonction $f$ est-elle continue ? Démontrer qu'elle est en réalité continue sur $[-R, R]$.

3) Exprimer, au moyen des fonctions usuelles, la somme de la série dérivée sur $]-R, R[$. En déduire une expression de $f$ sur $]-R, R[$.

4) Calculer $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n(2n+1)}$.

**Exercice 5.9**

On considère la série entière $f(x) = \displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n(n-1)} x^n$.

1) Déterminer l'intervalle de convergence de $f$ : on déterminera le rayon de convergence $R$ et on précisera s'il y a convergence en $R$ et $-R$.

2) Démontrer que $f$ est continue sur son intervalle de convergence.

3) Exprimer $f'$, puis $f$, à l'aide de fonctions usuelles sur l'intervalle $]-R, R[$.

4) Déduire des questions précédentes la valeur de $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} \frac{(-1)^n}{n(n-1)}$.

**Exercice 5.10**

On s'intéresse à une série entière $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ de rayon de convergence 1, de somme $f(x)$, telle que $\displaystyle\lim_{x\to 1^-} f(x)$ existe (on note $\ell$ cette limite).

La question est de savoir si la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} a_n$ converge (et vers quoi)...

1) En considérant $a_n = (-1)^n$ (pour tout $n \in \mathbb{N}$), montrer que, en général, la réponse est non.

2) On suppose dans cette question seulement que $a_n \geqslant 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

a) Soit $N \in \mathbb{N}$, montrer que $\ell \geqslant \displaystyle\sum_{n=0}^{N} a_n$.

b) En déduire que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} a_n$ converge.

c) Conclure

3) *Théorème de Tauber.* On suppose désormais que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} n a_n = 0$.

a) Pour $N \in \mathbb{N}$, on pose $x_N = 1 - \dfrac{1}{N+1}\cdot$ Établir

$$\left| f(x_N) - \sum_{n=0}^{N} a_n \right| \leqslant \left| \sum_{n=0}^{N} a_n \left(x_N^n - 1\right) \right| + \left| \sum_{n=N+1}^{+\infty} a_n x_N^n \right| \leqslant \frac{1}{N+1} \sum_{n=0}^{N} n|a_n| + \sup_{n \geqslant N+1} |na_n| \sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{x_N^n}{n}.$$

b) Conclure.

**Exercice 5.11**

Soient deux suites $(a_n)_{n\geqslant 0}$ et $(b_n)_{n\geqslant 0}$ avec $b_n > 0$ et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lambda \neq 0$. On suppose que $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} b_n x^n$ est de rayon de convergence 1 et divergente en 1.

1) Montrer que $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est de rayon de convergence 1.

2) Montrer que $\displaystyle\lim_{x\to 1^-} \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n = +\infty$.

3) Montrer que $\displaystyle\lim_{x\to 1^-} \frac{\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n}{\sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n} = \lambda$. *Indication : faire un raisonnement “à la Cesàro”.*

**Exercice 5.12**

*Théorème de Bernstein pour les séries entières.*

On fixe $A > 0$. Soit $f : ]-A, A[ \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^\infty$. On suppose que

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \forall x \in ]-A, A[ \qquad f^{(2k)}(x) \geqslant 0.$$

On veut montrer que $f$ est développable en série entière.

On considère la fonction $F(x) = f(x) + f(-x)$ où $x \in ]-A, A[$.

1) Justifier que $F$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ et que : $\forall k \in \mathbb{N}$, $\forall x \in ]-A, A[$, $\quad F^{(2k+1)}(0) = 0$ et $F^{(2k)}(0) \geqslant 0$.

2) Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer qu'il existe un polynôme $P_n$ de degré $2n$ (que l'on précisera) tel que

$$\forall x \in ]-A, A[, \qquad F(x) = P_n(x) + R_n(x)$$

avec $R_n(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{(x-t)^{2n+1}}{(2n+1)!} F^{(2n+2)}(t)\, dt$

3) On fixe $a \in ]0, A[$.

a) Montrer que pour tout $x \in [0, a[$, on a

$$0 \leqslant R_n(x) \leqslant \left(\frac{x}{a}\right)^{(2n+1)} R_n(a) \leqslant \left(\frac{x}{a}\right)^{(2n+1)} F(a).$$

b) En déduire que $F$ est développable en série entière sur $]-A, A[$.

4) Soit $x \in ]-A, A[$.

a) Justifier la validité de l'écriture $f(x) = Q_{2n+1}(x) + r_n(x)$ avec $r_n(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{(x-t)^{2n+1}}{(2n+1)!} f^{(2n+2)}(t)\,dt$ et $Q_n(x) = \displaystyle\sum_{j=0}^{n} \frac{f^{(j)}(0)}{j!} x^j$.

b) Montrer que $|r_n(x)| \leqslant R_n(|x|)$ puis que $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} r_n(x) = 0$.

c) Conclure.

5) Appliquer ce théorème à la fonction $x \to \tan(x)$.

**Exercice 5.13**

Soit $f(z) = \displaystyle\sum_{n \geqslant 0} a_n z^n$ développable en série entière (avec un rayon de convergence strictement positif). On suppose de plus que $a_0 \neq 0$. On veut prouver que la fonction $1/f$ est développable en série entière.

1) On suppose que $\dfrac{1}{f} = \displaystyle\sum_{n \geqslant 0} b_n z^n$, avec rayon de convergence $\rho$ strictement positif. Quelle relation de récurrence vérifie la suite $(b_n)$ ?

2) Soit $(b_n)$ la suite définie par la relation de récurrence précédente. Montrer qu'il existe $C > 0$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ :

$$|b_n| \leqslant \frac{C^n}{|a_0|}.$$

3) En déduire que $1/f$ est développable en série entière.

**Exercice 5.14**

Soit $f(z) = \displaystyle\sum_{n \geqslant 0} a_n z^n$ développable en série entière. On suppose que la suite est périodique. Montrer que $f$ est en fait une fraction rationnelle.

**Exercice 5.15**

On se propose dans cet exercice de calculer $\displaystyle\sum_{n \geqslant 0} \frac{1}{(3n)!}$.

Pour cela, on introduit

$$S(x) = \sum_{n \geqslant 0} \frac{x^{3n}}{(3n)!}.$$

Comme d'habitude, on note $j = e^{2i\pi/3}$.

a) Calculer $1 + j^k + j^{2k}$ pour tout entier $k \in \mathbb{N}$.

b) En déduire le développement en série entière de $e^x + e^{jx} + e^{j^2 x}$.

c) En déduire $S(x)$, puis la valeur de la somme $\displaystyle\sum_{n \geqslant 0} \frac{1}{(3n)!}$.

**Exercice 5.16**

Soit $(u_n)$ la suite réelle définie par $u_0 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} u_k u_{n-k}\,.$$

1) Montrer qu'il existe $C > 0$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant u_n \leqslant \dfrac{C^n}{(n+1)^2}\cdot$

2) Montrer que la série entière $f(x) = \sum_{n \geqslant 0} u_n x^n$ a un rayon de convergence strictement positif $r > 0$.

3) Démontrer que, pour tout $x \in ]-r, -r[$, on a $xf^2(x) - f(x) + 1 = 0$.

4) En déduire qu'il existe $\rho > 0$ tel que pour tout $x$ non nul dans $]-\rho, \rho[$, on a

$$f(x) = \frac{1 - \sqrt{1-4x}}{2x}\cdot$$

5) En déduire $u_n$ en fonction de $n$.

**Exercice 5.17**

On veut montrer que $\displaystyle\int_0^1 \ln(x)\ln(1-x)\,dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)^2}\cdot$

1) Justifier que la fonction $x \in ]0,1[ \mapsto \ln(x)\ln(1-x)$ se prolonge par continuité à $[0,1]$ (en une fonction que l'on notera $f$) et en déduire l'existence de $\displaystyle\int_0^1 \ln(x)\ln(1-x)\,dx$.

Pour tout entier $n \geqslant 1$, on définit $u_n(x) = \dfrac{1}{n}x^n \ln(x)$ pour $x \in ]0,1]$ et $u_n(0) = 0$.

2) Montrer que la série de fonctions de termes $u_n$ converge simplement vers $-f$ sur $[0,1]$.

3) Montrer que la série de fonctions de termes $u_n$ converge normalement sur $[0,1]$.

4) Pour tout entier $n \geqslant 1$, calculer $\displaystyle\int_0^1 x^n \ln(x)\,dx$.

5) Conclure. On pourra enfin calculer la somme en utilisant $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}\cdot$

**Exercice 5.18**

Pour tous les entiers $k$ et $n$ tels que $n \geqslant 1$ et $0 \leqslant k \leqslant n$, on note $D_{n,k}$ le nombre de bijections (ou permutations) $s$ de l'ensemble $\{1, \ldots, n\}$ ayant $k$ points fixes, c'est à dire telles que

$$k = \operatorname{card}\big\{i \in \{1, \ldots, n\};\ s(i) = i\big\}.$$

On pose $D_{0,0} = 1$ et $d_n = D_{n,0}$ désigne le nombre de dérangements, c'est à dire de permutations sans point fixe.

1) Dresser la liste de toutes les permutations de $\{1, 2, 3\}$ et en déduire la valeur de $D_{3,0}$, $D_{3,1}$, $D_{3,2}$ et $D_{3,3}$.

2) Montrer que $n! = \sum_{k=0}^{n} D_{n,k}$.

3) Montrer que $D_{n,k} = \binom{n}{k} D_{n-k,0}$.

4) Montrer que la série entière $\sum_{n\geqslant 0} \frac{d_n}{n!} z^n$ a un rayon de convergence supérieur ou égal à 1.

5) On pose $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{d_n}{n!} x^n$. Montrer que $\mathrm{e}^x f(x) = \frac{1}{1-x}$ pour $|x| < 1$.

6) En déduire que $d_n = n! \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$.

7) Soit $p_n$ la probabilité pour qu'une permutation prise au hasard soit un dérangement. Quelle est la limite de $p_n$ quand $n$ tend vers $+\infty$ ?

**Exercice 5.19**

On rappelle qu'une involution de $\{1, \ldots, n\}$ est une application $s$ de $\{1, \ldots, n\}$ dans $\{1, \ldots, n\}$ telle que $s \circ s(k) = k$ pour tout $k \in \{1, \ldots, n\}$. On note $I_n$ le nombre d'involutions de $\{1, \ldots, n\}$ et on convient que $I_0 = 1$.

1) Démontrer que, si $n \geqslant 1$, alors

$$I_{n+1} = I_n + nI_{n-1}.$$

2) Démontrer que la série entière $S(x) = \sum_{n\geqslant 0} \frac{I_n}{n!} x^n$ converge pour tout $x$ dans $]-1, 1[$. On note $S$ sa somme.

3) Justifier que, pour tout $x \in ]-1, 1[$, on a $S'(x) = (1 + x)S(x)$.

4) En déduire une expression de $S(x)$ en fonction de $x$.

5) En déduire une expression de $I_n$.

**Exercice 5.20**

Chercher des solutions développables en série entière de l'équation

$$(1 + x^2)y'' - 2y = 0$$

On exhibera notamment deux telles solutions indépendantes.

En fait (on l'admettra) que toute solution de l'équation différentielle est alors combinaison linéaire de ces deux solutions.

**Exercice 5.21**

*Théorème Taubérien de Hardy-Littlewood.* On s'intéresse à une série entière $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ de rayon de convergence 1, de somme $f(x)$, telle que $\lim_{x\to 1^-} f(x)$ existe (et on notera $\ell$ cette limite).

La question est de savoir si la série $\sum_{n\geqslant 0} a_n$ converge.

On suppose ici que la suite $\big(na_n\big)_n$ est bornée (en fait, on ne va utiliser que la condition $na_n \geqslant -C$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, où $C > 0$).

1) Montrer que pour tout polynôme $P$, on a $\lim_{x\to 1^-} \sum_{n=0}^{+\infty} a_n P(x^n)$ existe et vaut $P(1)\ell$.

Soit $q$ la fonction indicatrice de l'intervalle $\left[\frac{1}{e}, 1\right]$.

2) On veut montrer que $\limsup_{x\to 1^-} \sum_{n=0}^{+\infty} a_n q(x^n)$ est majoré par $\ell$.

Soit $\varepsilon > 0$. On considère la fonction $h(t) = \dfrac{q(t)-t}{t(1-t)}$ pour $t \in ]0,1[$.

a) Montrer que l'on peut prolonger $h$ par continuité en 0 et en 1. Quel est le seul point de discontinuité de $h$ (sur $[0,1]$) ?

b) Justifier l'existence d'un polynôme $H$ vérifiant $H \geqslant h$ sur $]0,1[$ et

$$\int_0^1 \Big(H(t) - h(t)\Big)\, dt \leqslant \varepsilon.$$

Soit $P$ le polynôme $P(X) = X + X(1-X)H(X)$. Noter que $P \geqslant q$ sur $[0,1]$.

c) On pose $\Phi(t) = \dfrac{P(t)-q(t)}{(1-t)}$ pour $t \in ]0,1[$.

(i) Montrer que, pour tout $x \in ]0,1[$, on a

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n q(x^n) - \sum_{n=0}^{+\infty} a_n P(x^n) \leqslant C(1-x) \sum_{n=1}^{+\infty} \Phi(x^n).$$

(ii) Montrer que $\lim_{x\to 1^-} (1-x) \sum_{n=1}^{+\infty} \Phi(x^n)$ existe et vaut $\int_0^1 \frac{1}{t}\Phi(t)\, dt \leqslant \varepsilon$.

d) Conclure.

3) Montrer que de même on a $\liminf_{x\to 1^-} \sum_{n=0}^{+\infty} a_n q(x^n) \geqslant \ell$ et conclure.

# 6 Séries de Fourier

### Exercice 6.1

Dans tout cet exercice les fonctions sont $2\pi$-périodiques.
Développer en série de Fourier les fonctions $f$ suivantes définies par :
1) $f(x) = \cos(2x)$ pour $x \in \mathbb{R}$.
2) $f(x) = x$ pour $x \in ]-\pi, \pi]$.
3) $f(x) = -1$ pour $x \in ]-\pi, 0]$ et $f(x) = +1$ pour $x \in ]0, \pi]$.
4) $f(x) = |x|$ pour $x \in [-\pi, \pi]$.
5) $f(x) = x^2$ pour $x \in [-\pi, \pi]$.
6) $f(x) = x^2$ pour $x \in ]0, 2\pi]$.

En déduire les valeurs de

$$\sum_{n\geqslant 0} \frac{1}{(2n+1)^2} \qquad \sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^2} \qquad \sum_{n\geqslant 0} \frac{1}{(2n+1)^4} \qquad \sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^4}.$$

### Exercice 6.2

Soient $a \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}$ et $f(t) = \exp(iat)$ pour $t \in [-\pi, \pi[$, prolongée par $2\pi$-périodicité.
Calculer les coefficients de Fourier de $f$ puis montrer que

$$\pi \text{cotan}(\pi a) = \frac{1}{a} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2a}{a^2 - n^2}.$$

En faisant un D.L. en $a = 0$ à l'ordre 3 de $\text{cotan}(\pi a) - \dfrac{1}{\pi a}$, en déduire les sommes

$$\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^2} \qquad \sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^4}.$$

### Exercice 6.3

Développer en série de Fourier la fonction $2\pi$-périodique $t \mapsto |\sin(t)|$.

### Exercice 6.4

Soient $f$ la fonction $2\pi$-périodique qui coincide avec la fonction indicatrice de $[-1, 1]$ sur $[-\pi, \pi[$.
1) Développer $f$ en série de Fourier.
2) En déduire la convergence et les valeurs de

$$\sum_{n\geqslant 1} \frac{\sin(n)}{n} \qquad \sum_{n\geqslant 1} \left(\frac{\sin(n)}{n}\right)^2$$

**Exercice 6.5**

Justifier que pour tout $n \in \mathbb{Z}$ et toute fonction $h$ continue par morceaux et $2\pi$-périodique, on a

$$\left|\widehat{h}(n)\right| \leqslant \int_0^{2\pi} |h(x)| \frac{dx}{2\pi} \leqslant \Big(\int_0^{2\pi} |h(x)|^2 \frac{dx}{2\pi}\Big)^{1/2}.$$

**Exercice 6.6**

Soient $f$ et $g$ continues par morceaux et $2\pi$-périodiques.
On veut montrer que $\widehat{f * g}(n) = \widehat{f}(n).\widehat{g}(n)$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$.
1) Le montrer lorsque $g$ est un polynôme trigonométrique.
2) Conclure.

**Exercice 6.7**

Soient $f$ et $g$ continues sur $\mathbb{R}$ et $2\pi$-périodiques. On veut montrer que

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^{2\pi} f(x)g(nx) \frac{dx}{2\pi} = \left(\int_0^{2\pi} f(x) \frac{dx}{2\pi}\right).\left(\int_0^{2\pi} g(x) \frac{dx}{2\pi}\right)$$

1) Établir le résultat pour $g$ polynôme trigonométrique.
2) Conclure.

**Exercice 6.8**

**Inégalité de Bernstein.** Soit $P$ un polynôme trigonométrique de degré $N \geqslant 1$. On veut montrer que

$$\sup_{x\in\mathbb{R}}\left|P'(x)\right| \leqslant N \sup_{x\in\mathbb{R}}\left|P(x)\right|.$$

On écrit $P = \sum_{k=-N}^{N} c_k \mathrm{e}_k$.

1) Soit $F(t) = P\big(\frac{\pi t}{2N}\big)$ où $t \in \mathbb{R}$. Quelle inégalité cherche-t-on à montrer en terme de $F$ et $F'$ ?

2) On considère la fonction triangle $\Delta$ définie par $\Delta(x) = x$ pour $x \in \big] -\pi/2, +\pi/2\big]$, par $\Delta(x) = \pi - x$ pour $x \in \big] +\pi/2, +3\pi/2\big]$ et qui est $2\pi$-périodique.

a) Développer $\Delta$ en série de Fourier.

b) Justifier que pour tout $k \in \mathbb{Z}$ avec $|k| \leqslant N$, on a

$$\frac{k\pi}{2N} = \lim_{m\to+\infty} \sum_{n=-m}^{m} \widehat{\Delta}(n)\mathrm{e}_n\Big(\frac{\pi k}{2N}\Big)$$

3) En déduire que $\sup_{t\in\mathbb{R}}\left|F'(t)\right| \leqslant M \sup_{t\in\mathbb{R}}\left|F(t)\right|$ avec $M = \lim_{m\to+\infty} \sum_{n=-m}^{m} \left|\widehat{\Delta}(n)\right|$.

4) Conclure

**Exercice 6.9**

**Théorème de Bernstein.** Soit $f$ une fonction Höldérienne d'ordre $\alpha$ avec $\alpha > 1/2$ i.e.

$$\sup\Big\{\frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|^\alpha};\ x \neq y\Big\} < \infty.$$

1) En notant $f_x(t) = f(x+t)$ où $x, t \in \mathbb{R}$, calculer $\widehat{f_x}(n)$ en fonction de $\hat{f}(n)$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$.

2) On veut montrer qu'il existe $C > 0$ tel que pour tout $j \in \mathbb{N}$, on a

$$C 2^{-2j\alpha} \geqslant \sum_{2^j+1 \leqslant |n| \leqslant 2^{j+1}} |\hat{f}(n)|^2.$$

a) Soit $x \in \mathbb{R}$.

(i) Exprimer $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \big|f_x(t) - f(t)\big|^2\, dt$ à l'aide des coefficients de Fourier de $f$.

(ii) En utilisant la propriété Höldérienne de $f$, montrer qu'il existe $c > 0$ tel que pour tout $j \in \mathbb{N}$

$$c.x^{2\alpha} \geqslant \sum_{2^j+1 \leqslant |n| \leqslant 2^{j+1}} |\hat{f}(n)|^2 \sin^2\big(nx/2\big).$$

b) Conclure en choisissant judicieusement une valeur de $x$ dans la question a.

3) Montrer que les séries de terme général $\big|\hat{f}(n)\big|$ et $\big|\hat{f}(-n)\big|$ convergent.

**Exercice 6.10**

**Inégalité isopérimétrique.** Soit $\Gamma$ un arc de Jordan dans $\mathbb{C}$ de classe $C^1$ par morceaux (continue fermée sans point double) et de longueur $L$ enfermant une surface d'aire $S$.

Alors on veut montrer que

$$L^2 \geqslant 4\pi S$$

et que l'on a égalité uniquement dans le cas d'un cercle.

On peut supposer $L = 2\pi$ (pourquoi ?) et on paramètre $\Gamma$ par l'abscisse curviligne $s$ (donc $\Gamma = \{(x(s), y(s))|\ s \in [0, 2\pi]\}$). On peut aussi supposer $\hat{x}(0) = 0$ (pourquoi ?).

a) Exprimer $S$ et $L(= 2\pi)$ en fonction de d'intégrales simples de la variable $s$ (on pourra utiliser la formule de Green-Riemann pour exprimer $S$).

b) Etablir l'inégalité d'Hürwitz : soit $f$ une fonction de classe $C^1$ sur $[0, 2\pi]$ à valeurs complexes. Alors

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(x)|^2 dx - \Big|\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x) dx\Big|^2 \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f'(x)|^2 dx.$$

On étudiera le cas d'égalité.

c) Conclure (Indication : on minorera $L^2 - 4\pi S$ par 0 en étudiant le cas d'égalité).

**Exercice 6.11**

**Equation de la chaleur (cas d'une barre finie).** On considère une fonction $h$ $C^1$ sur $[0,\pi]$. On cherche à trouver $u$, définie sur $[0,\pi]\times\mathbb{R}^+$ et $C^\infty$ sur $[0,\pi]\times]0,+\infty[$, telle que

$$u(0,t) = u(\pi,t) = 0 \ \text{ pour } t \geqslant 0 \qquad u(x,0) = h(x) \text{ pour } x \in ]0,\pi[$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \ \text{ dans } ]0,\pi[\times]0,+\infty[.$$

1) On va d'abord montrer que les solutions à variables séparées : $u(x,t) = f(x)g(t)$ de l'équation de la chaleur $\dfrac{\partial u}{\partial t} - \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$ dans $]0,\pi[\times]0,+\infty[$ avec $u(0,t) = u(\pi,t) = 0$ pour $t > 0$ sont de la forme

$$u_n(x,t) = c_n \sin(nx).\mathrm{e}^{-n^2 t}$$

où $n \geqslant 1$ et $c_n \in \mathbb{R}$.

On suppose que $u$ n'est pas identiquement nulle (la fonction nulle est clairement solution ici).

a) Justifier que les fonctions $f$ et $g$ sont chacune solutions d'une équation différentielle : $f'' = \lambda f$ et $g' = \lambda g$ où $\lambda$ est un réel.

b) Résoudre ces équations différentielles et exploiter $u(0,t) = u(\pi,t) = 0$ pour justifier la forme de $\lambda$.

2) Résoudre le problème de la chaleur. *Indication : on "prolongera" d'une part $h$ en une fonction impaire $2\pi$-périodique sur $\mathbb{R}$. D'autre part, on utilisera la méthode de superposition, i.e. on sommera la famille de solutions obtenues au a. Ainsi on cherche une solution sous la forme*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} c_n \sin(nx).\mathrm{e}^{-n^2 t}$$

3) Pour $x \in ]0,\pi[$, montrer que $\lim\limits_{t\to 0^+} u(x,t) = h(x)$ et que $\lim\limits_{t\to+\infty} u(x,t) = 0$.

# 7 Intégrales doubles

**Exercice 7.1**

Dessiner le domaine $\mathscr{D}$ puis calculer les intégrales doubles suivantes :

1) $\displaystyle\iint_{\mathscr{D}} xy\,dxdy$ avec $\mathscr{D} = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x, y \geqslant 0 \text{ et } x+y \leqslant 1\big\}$.

2) $\displaystyle\iint_{\mathscr{D}} x^2\,dxdy$ avec $\mathscr{D} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leqslant 1\right\}$ ; avec $a, b > 0$.

3) $\displaystyle\iint_{\mathscr{D}} |x-y|\,dxdy$ avec $\mathscr{D} = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| \leqslant 1 \text{ et } |y| \leqslant 1\big\}$.

4) $\displaystyle\iint_{\mathscr{D}} \frac{x}{\sqrt{1+x^2+y^2}}\,dxdy$ avec $\mathscr{D} = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y^2 \leqslant 2x \text{ et } 0 \leqslant x \leqslant 2\big\}$.

**Exercice 7.2**

On veut calculer l'aire de la fenêtre de Viviani, c'est à dire la surface obtenue comme intersection de la sphère unité (de $\mathbb{R}^3$) et du cylindre d'équation $x^2+y^2-x \leqslant 0$.

On rappelle (i.e. on admet) que l'aire de la surface donnée par l'ensemble des points $M$ tels que $\overrightarrow{OM} = \vec{f}(\theta,\varphi)$, où $(\theta,\varphi) \in D$ est $\displaystyle\iint_{\mathscr{D}} \left\|\frac{\partial\vec{f}}{\partial\theta} \wedge \frac{\partial\vec{f}}{\partial\varphi}\right\| d\theta d\varphi$.

a) Montrer qu'une paramétrisation de la demi-fenêtre située au dessus du plan $z=0$, est donnée par

$$\vec{f}(\theta,\varphi) = \begin{pmatrix} \cos(\theta)\cos(\varphi) \\ \sin(\theta)\cos(\varphi) \\ \sin(\varphi) \end{pmatrix}$$

avec les conditions $0 \leqslant |\theta| \leqslant \varphi \leqslant \dfrac{\pi}{2}$.

b) Conclure.

**Exercice 7.3**

Calculer les intégrales doubles suivantes (on pourra éventuellement effectuer un changement de variable).

1) $\displaystyle\iint_{\mathscr{D}} xy(x^2-y^2)\sqrt{1-x^2}\,dxdy$ où $\mathscr{D}$ est le quart nord-est du disque unité.

2) $\displaystyle\iint_{\mathscr{D}} (x^2+y^2)\,dxdy$ où $\mathscr{D} = \Big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geqslant 0 \;\; y^2+2x \leqslant 1\Big\}$. (*on pourra raisonner directement avec Fubini, ou faire un changement de variable*)

3) $\displaystyle\iint_{\mathscr{D}} \frac{xy}{\left[1+(x^2+y^2)\right]^2}\, dxdy$ où $\mathscr{D}$ est l'intérieur de la cardioide d'équation polaire $r = a\big(1+\cos\big(\theta\big)\big)$ (avec $a > 0$).

4) $\displaystyle\iint_{\mathscr{D}} (x^2+y^2)\, dxdy$ où $\mathscr{D} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} \leqslant 1\right\}$ ; avec $a, b > 0$.

5) $\displaystyle\iint_{\mathscr{D}} (x+y)\, dxdy$ où $\mathscr{D} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0\,, x^2 \leqslant y \leqslant 2x^2\,;\ 1 \leqslant xy \leqslant 2\right\}$. (*on pourra faire un changement de variable* $(x,y) \in \mathscr{D} \mapsto (y/x^2, xy)$ *dont on précisera l'image*)

6) $\displaystyle\iint_{\mathscr{D}} \exp\left(\frac{x^3+y^3}{xy}\right) dxdy$ où $\mathscr{D} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y^2 \leqslant 2px\,, x^2 \leqslant 2py\right\}$ (avec $p > 0$).

(*on pourra faire un changement de variable* $(x,y) \in \mathscr{D} \mapsto (x^2/y; y^2/x)$ *dont on précisera l'image*)

**Exercice 7.4**

En utilisant la formule de Green-Riemann, calculer l'aire de la surface délimitée par les courbes (fermées) suivantes :

1) L'astroïde : $t \in [0, 2\pi] \longmapsto \Big(a\cos^3(t), a\sin^3(t)\Big)$ , avec $a > 0$.

2) La cardioide d'équation polaire $r = a\big(1+\cos(\theta)\big)$ , avec $a > 0$.

3) La boucle du folium de Descartes d'équation polaire $r = \dfrac{3a\sin(\theta)\cos(\theta)}{\sin^3(\theta)+\cos^3(\theta)}$.

*Indication : on pourra poser* $t = \tan(\theta)$ *dans l'intégrale intervenant dans le calcul*