Capes de Mathématiques.
Université d'Artois
P. Lefèvre.

Problème en classe: Théorème de Bernstein.

Éléments de correction.

I] 1) C'est l'inégalité de Bienaymé-Tchebichev. On a $var(Z) = \mathbb{E}\Big[\big(Z - \mathbb{E}(Z)\big)^2\Big]$. On pose $E = \{|Z - \mathbb{E}(Z)| \geq \alpha\}$.

Avec une présentation via la mesure $\mathbb{P}$, on peut écrire:

$$var(Z) \geq \int_E |Z - \mathbb{E}(Z)|^2 \, d\mathbb{P} \geq \int_E \alpha^2 \, d\mathbb{P} = \alpha^2 \, \mathbb{P}(E).$$

Pour une rédaction (élémentaire) plus en conformité avec le programme du Capes et le fait que l'on manipule une probabilité finie: on a, en posant $X = \big(Z - \mathbb{E}(Z)\big)^2$, qui est une v.a. positive:

$$varZ = \mathbb{E}(X) = \sum_{k \in X(\Omega)} k \, \mathbb{P}(\{X = k\}) \geq \sum_{k \in X(E)} k \, \mathbb{P}(\{X = k\}).$$

Or, lorsque $\omega \in E$, $X(\omega) = \big(Z(\omega) - \mathbb{E}(Z)\big)^2 \geq \alpha^2$, donc $varZ \geq \sum\limits_{k \in X(E)} \alpha^2 \mathbb{P}(\{X = k\})$ puis on remarque que E est inclus dans la réunion (disjointe) des évènements $\{X = k\}$, où k décrit les valeurs de $X(E)$. On conclut

$$varZ \geq \alpha^2 \sum_{\omega \in E} \mathbb{P}(\{\omega\}) = \alpha^2 \mathbb{P}(E).$$

2) $var\Big(\sum\limits_{i=1}^{n} Z_i\Big) = var\Big(\sum\limits_{i=1}^{n} Z'_i\Big)$ où $Z'_i = Z_i - \mathbb{E}(Z_i)$, car $\mathbb{E}\Big(\sum\limits_{i=1}^{n} Z_i\Big) = \sum\limits_{i=1}^{n} \mathbb{E}Z_i$.

Comme les v.a. Z_i sont indépendantes, les v.a. Z'_i sont aussi indépendantes. Et la propriété supplémentaire des Z'_i est qu'elles sont centrées: $\mathbb{E}Z'_i = 0$. On a alors:

$$var\Big(\sum_{i=1}^{n} Z_i\Big) = \mathbb{E}\Big(\sum_{1 \leq i,j \leq n} Z'_i Z'_j\Big) = \sum_{1 \leq i,j \leq n} \mathbb{E}Z'_i Z'_j.$$

Or $\mathbb{E}Z'_i Z'_j = (\mathbb{E}Z'_i)(\mathbb{E}Z'_j) = 0$, si $i \neq j$, par indépendance; et $\mathbb{E}Z'_i Z'_j = var(Z_i)$ si $i = j$.

Finalement, on a bien $var\Big(\sum\limits_{i=1}^{n} Z_i\Big) = \sum\limits_{i=1}^{n} var(Z_i)$.

II]1) S_n prend ses valeurs dans $\{0,\dots,n\}$ et pour $k\in\{0,\dots,n\}$, on a

$$\mathbb{P}\Big(\{S_n=k\}\Big)=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k},$$

autrement dit: S_n suit la loi binomiale de paramètre p.

En effet, $\{S_n=k\}$ la réunion (disjointe) des évènements

$$\Big\{\omega\in\Omega|\,\forall i\in E,\ X_i(\omega)=1 \text{ et } \forall i\notin E,\ X_i(\omega)=0\Big\},$$

où E décrit les parties de $\{1,\dots,n\}$ de cardinal k.

Donc

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\Big(\{S_n=k\}\Big) &= \sum_{\substack{E\subset\{1,\dots,n\}\\ card(E)=k}}\mathbb{P}\Big(\Big\{\omega\in\Omega|\,\forall i\in E,\ X_i(\omega)=1 \text{ et } \forall i\notin E,\ X_i(\omega)=0\Big\}\Big)\\ &= \sum_{\substack{E\subset\{1,\dots,n\}\\ card(E)=k}}\mathbb{P}\Big(\bigcap_{i\in E}\{X_i=1\}\cap\bigcap_{i\notin E}\{X_i=0\}\Big)\end{aligned}$$

En utilisant l'indépendance des v.a. X_i, cela donne

$$\mathbb{P}\Big(\{S_n=k\}\Big)=\sum_{\substack{E\subset\{1,\dots,n\}\\ card(E)=k}}\prod_{i\in E}\mathbb{P}(\{X_i=1\}).\prod_{i\notin E}\mathbb{P}(\{X_i=0\})=\sum_{\substack{E\subset\{1,\dots,n\}\\ card(E)=k}}p^k(1-p)^{n-k}$$

car $\mathbb{P}(\{X_i=1\})=p$ et $\mathbb{P}(\{X_i=0\})=1-p$.

D'où le résultat puisqu'il y a $\binom{n}{k}$ termes dans la somme.

2) a) Y_n prend ses valeurs dans $\Big\{\frac{k}{n}\mid 0\le k\le n\Big\}$ et

$$\mathbb{P}\Big(\{Y_n=\frac{k}{n}\}\Big)=\mathbb{P}\Big(\{S_n=k\}\Big)=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}.$$

b) $\mathbb{E}X_n=1.\mathbb{P}_{X_n}(\{1\})+0.\mathbb{P}_{X_n}(\{0\})=p$. On en déduit $\mathbb{E}Y_n=\frac{1}{n}\mathbb{E}S_n=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n\mathbb{E}X_i=p$.

c) $\mathbb{E}X_n^2=1^2.\mathbb{P}_{X_n}(\{1\})+0^2.\mathbb{P}_{X_n}(\{0\})=p$ donc $varX_n=\mathbb{E}X_n^2-(\mathbb{E}X_n)^2=p(1-p)$. Comme $varY_n=\frac{1}{n^2}varS_n=\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^n varX_i$ d'après I.2., on en déduit que

$$varY_n=\frac{1}{n^2}.n.p(1-p)=\frac{p(1-p)}{n}.$$

3) a) $h(Y_n)$ prend ses valeurs dans $\Big\{h\Big(\frac{k}{n}\Big)\mid 0\le k\le n\Big\}$.

b) Soit $k\in\{0,\dots,n\}$. Comme h est injective, $h(x)=h\Big(\frac{k}{n}\Big)$ si et seulement si $x=\frac{k}{n}$ donc on a

$$\mathbb{P}\Big(\Big\{h(Y_n)=h\Big(\frac{k}{n}\Big)\Big\}\Big)=\mathbb{P}\Big(\Big\{Y_n=\frac{k}{n}\Big\}\Big)=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}.$$

Dans le cas général, pour $k\in\{0,\dots,n\}$, on note $J_k=\Big\{0\le l\le n|\ h\Big(\frac{l}{n}\Big)=h\Big(\frac{k}{n}\Big)\Big\}$. C'est en fait la classe d'équivalence de k modulo la relation sur $\{0,\dots,n\}$: $l\sim k$ si $h\Big(\frac{l}{n}\Big)=h\Big(\frac{k}{n}\Big)$. Considérons les différentes classes d'équivalence : J_k pour $k\in S$, où $S\subset\{0,\dots,n\}$. Autrement dit: si $k\neq k'$, on a $J_k\cap J_{k'}=\emptyset$ et pour tout $k\in\{0,\dots,n\}$, il existe un $k'\in S$ tel que $J_k=J_{k'}$. On a alors pour chaque $k\in S$: $\mathbb{P}\Big(\Big\{h(Y_n)=h\Big(\frac{k}{n}\Big)\Big\}\Big)=\sum_{l\in J_k}\mathbb{P}\Big(\Big\{Y_n=\frac{l}{n}\Big\}\Big)$ car $\{h(Y_n)=h\Big(\frac{k}{n}\Big)\Big\}=\bigcup_{l\in J_k}\{Y_n=\frac{l}{n}\}$ (réunion disjointe !). On obtient

$$\mathbb{P}\Big(\Big\{h(Y_n)=h\Big(\frac{k}{n}\Big)\Big\}\Big)=\sum_{l\in J_k}\binom{n}{l}p^l(1-p)^{n-l}.$$

4) Grâce à la question 3., on peut écrire

$$\mathbb{E}\Big(h(Y_n)\Big)=\sum_{k\in S}h\Big(\frac{k}{n}\Big)\mathbb{P}\Big(\Big\{h(Y_n)=h\Big(\frac{k}{n}\Big)\Big\}\Big)=\sum_{k\in S}h\Big(\frac{k}{n}\Big)\sum_{l\in J_k}\binom{n}{l}p^l(1-p)^{n-l}.$$

Or, lorsque $l\in J_k$, on a $h\Big(\frac{k}{n}\Big)=h\Big(\frac{l}{n}\Big)$ donc

$$\mathbb{E}\Big(h(Y_n)\Big)=\sum_{k\in S}\sum_{l\in J_k}h\Big(\frac{l}{n}\Big)\binom{n}{l}p^l(1-p)^{n-l}=\sum_{0\le l\le n}h\Big(\frac{l}{n}\Big)\binom{n}{l}p^l(1-p)^{n-l}$$

car $\{0,\dots,n\}$ est la réunion disjointe des ensembles J_k lorsque k décrit S.

III]1) h est continue sur le segment $[0,1]$ donc uniformément continue par le théorème de Heine.

2) a) Si $x\in I$, on a $|Y_n(x)-p|<\delta$ donc $|h(Y_n(x))-h(p)|\le\varepsilon$. Ainsi $|h(Y_n)-h(p)|.\mathbb{1}_I\le\varepsilon$ donc par monotonie de l'espérance:

$$\mathbb{E}\Big(|h(Y_n)-h(p)|.\mathbb{1}_I\Big)\le\mathbb{E}\varepsilon=\varepsilon.$$

b) Bien sûr: $\mathbb{E}\Big(|h(Y_n)-h(p)|\Big)=\mathbb{E}\Big(|h(Y_n)-h(p)|.\mathbb{1}_I\Big)+\mathbb{E}\Big(|h(Y_n)-h(p)|.\mathbb{1}_{\Omega\setminus I}\Big)$.
Or $\mathbb{E}\Big(|h(Y_n)-h(p)|.\mathbb{1}_I\Big)\le\varepsilon$ d'après 2.a.
et d'autre part, on a bien sûr $|h(Y_n)-h(p)|.\mathbb{1}_{\Omega\setminus I}\le 2\|h\|_\infty\mathbb{1}_{\Omega\setminus I}$ d'où

$$\mathbb{E}\Big(|h(Y_n)-h(p)|.\mathbb{1}_{\Omega\setminus I}\Big)\le\mathbb{E}\Big(2\|h\|_\infty\mathbb{1}_{\Omega\setminus I}\Big)=2\|h\|_\infty.\mathbb{P}(\Omega\setminus I)$$

d'où le résultat avec $M=2\|h\|_\infty$.

c) Comme $\mathbb{P}(\Omega \setminus I) \leq \dfrac{var(Y_n)}{\delta^2}$ d'après I.1. et $var(Y_n) \leq \dfrac{1}{n}$ d'après II.2.c., on a

$$\Big|\mathbb{E}(h(Y_n) - h(p))\Big| \leq \mathbb{E}\Big(|h(Y_n) - h(p)|\Big) \leq \varepsilon + \frac{M}{n\delta^2}.$$

IV]1) On réécrit le III.4.: pour tout entier $n \geq 1$ et tout $p \in [0,1]$:

$$\Big|\sum_{0\leq k\leq n} \binom{n}{k} h\Big(\frac{k}{n}\Big)p^k(1-p)^{n-k} - h(p)\Big| \leq \varepsilon + \frac{M}{n\delta^2}$$

où δ ne dépend que de ε.

Ainsi il existe $n_0 \geq 1$ ($n_0 \geq M/\varepsilon\delta^2$) tel que pour tout entier $n \geq n_0$ et tout $p \in [0,1]$:

$$\Big|\sum_{0\leq k\leq n} \binom{n}{k} h\Big(\frac{k}{n}\Big)p^k(1-p)^{n-k} - h(p)\Big| \leq 2\varepsilon.$$

2) Ainsi, étant donnée h continue sur $[0,1]$, on définit la suite de polynômes (les polynômes de Bernstein):

$$B_n(X) = \sum_{0\leq k\leq n} \binom{n}{k} h\Big(\frac{k}{n}\Big)X^k(1-X)^{n-k} \in \mathbb{R}_n[X]$$

D'après le 1., pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $n_0 \geq 1$ tel que pour tout entier $n \geq n_0$ et tout $p \in [0,1]$: $|h(p) - B_n(p)| \leq 2\varepsilon$, i.e. $\|h - B_n\|_\infty \leq 2\varepsilon$. Ainsi $(B_n)_n$ converge uniformément vers h sur $[0,1]$.

3) Si le segment est un singleton: c'est trivial ! Soient $[a,b]$ un segment quelconque non trivial ($a < b$) et f continue sur ce segment. On définit $h(t) = f(ta + (1-t)b)$ pour $t \in [0,1]$. Comme h est continue, on lui associe la suite de polynômes de Bernstein $(B_n)_n$, qui converge uniformément vers h sur $[0,1]$ d'après le 2.

On définit alors la suite de polynômes: $P_n(X) = B_n\Big(\frac{X-b}{a-b}\Big)$.

Comme $\sup\limits_{x\in[a,b]} |f(x) - P_n(x)| = \sup\limits_{t\in[0,1]} |h(t) - B_n(t)|$. Le résultat est immédiat.