Capes de Mathématiques.
Université d'Artois
P. Lefèvre.

Fonctions de plusieurs variables

Exercice 1 Montrer que la norme euclidienne sur $\mathbb{R}^n$ est différentiable sur $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.

Exercice 2 Etudier la continuité et la différentiabilité de la fonction f suivante (où $\alpha > 0$)

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & \begin{cases} 0 & si\ (x,y)=0 \\ \dfrac{|xy|^\alpha}{x^2-xy+y^2} & sinon \end{cases} \end{array}$$

Indication: on pourra tester $f(x,x)$ et discuter en fonction de α.

Exercice 3 Montrer que la fonction f suivante est différentiable sur $\mathbb{R}^2$ et calculer les dérivées partielles croisées secondes en $(0,0)$. Qu'en déduit-on ?

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & \begin{cases} 0 & si\ (x,y)=0 \\ xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & sinon \end{cases} \end{array}$$

Exercice 4 Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$. On considère la fonction F

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & \begin{cases} \dfrac{f(x)-f(y)}{x-y} & si\ x \neq y \\ f'(x) & si\ x = y \end{cases} \end{array}$$

1) Montrer que F est continue si et seulement si f est de classe C^1.
Indication: on fera très attention en écrivant la continuité. Utiliser le Th. des accroissements finis

2) Montrer que F est différentiable sur $\mathbb{R}^2 \setminus \Delta$, où Δ est la diagonale $\{(x,x) |\, x \in \mathbb{R}\}$.
On suppose que $f''(a)$ existe. Montrer que F est différentiable en (a,a). *Indication: considérer la fonction $t \mapsto f(t) - (t-a)f'(a) - \dfrac{(t-a)^2}{2} f''(a)$.*

Exercice 5 Montrer que l'application déterminant (disons dans la base canonique) est différentiable sur $\mathbb{R}^n \times \cdots \times \mathbb{R}^n$ et montrer que sa différentielle est reliée à la trace.

Indication: On commencera par simplifier les choses en se ramenant à la différentiabilité en I. Ensuite, il y a plusieurs méthodes. Par exemple, on peut penser au polynôme caractéristique.

Exercice 6 Soient u, v deux vecteurs de $\mathbb{R}^2$. Montrer que les applications suivants sont différentiables et calculer préciser leur jacobienne.

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ \vec{x} & \longmapsto & \langle \vec{x}, u \rangle v \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ \vec{x} & \longmapsto & \langle \vec{x}, u \rangle \vec{x} \end{array}$$

Exercice 7 Pour $|t| < 1/\sqrt{2}$, montrer que l'équation $\sin(tx) + \cos(tx) = x$ admet une unique solution que l'on note $\varphi(t)$. Montrer que la fonction φ ainsi définie est de classe C^∞ sur $]-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}[$ et donner un DL à l'ordre 3 au voisinage de 0.

Indication: on pourra utiliser le th. des fonctions implicites.

Exercice 8 Exprimer le laplacien en coordonnées polaires. On rappelle que $\Delta f = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ en coordonnées cartésiennes et que le changement de variable en polaires est $x = r\cos(\theta)$ et $y = r\sin(\theta)$.

Exercice 9 Dans le plan euclidien, deux cercles sont tangents extérieurement en O. Un point M décrit le premier cercle, un point M' décrit le second cercle. Trouver l'aire maximale du triangle OMM'.

Exercice 10 Trouver la plus petite constante C telle que pour tous $x, y \geq 0$, on a $x^2 + y^2 \leq C \exp(x + y)$.

Exercice 11 Pour $x, y, z > 0$, on définit $f(x, y, z) = x\ln(x) + y\ln(y) + z\ln(z)$. Déterminer les extremum de f sur l'hyperplan $x + y + z = 3$.

Indication: méthode 1: utiliser les résultats sur les extrema liés. Méthode 2: se ramener à des fonctions de deux variables.

Exercice 12 Calculer l'aire de la fenêtre de Viviani: surface obtenue comme intersection de la sphère unité (de $\mathbb{R}^3$) et du cylindre d'équation $x^2 + y^2 - x = 0$.

Indication: on rappelle que l'aire de la surface donnée par l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{OM} = \vec{f}(x, y)$, où $(x, y) \in D$ est $\displaystyle\int_D \left\| \frac{\partial \vec{f}}{\partial x} \wedge \frac{\partial \vec{f}}{\partial y} \right\| dxdy$

Exercice 13 Calculer le volume d'une boule de rayon R de $\mathbb{R}^n$ (muni de sa structure euclidienne).

Indication: on pourra raisonner par récurrence sur la dimension.