Licence de Mathématiques. Université d'Artois.
Durée 4h
7 Mars 2007.

Examen TOPOLOGIE

Session 2

Les calculatrices et les documents sont interdits.
La rédaction sera prise en compte dans la notation.

Questions de cours. (3 points=2+1)

1) Soit H un espace de Hilbert. Enoncer le théorème de projection sur un convexe, avec la propriété de l'angle obtus.
2) Soit $(E_i)_{i\in I}$ une famille (indicée par un ensemble I) d'espaces topologiques (munis chacun d'une topologie τ_i). Quelle est la définition de la topologie produit sur $\prod\limits_{i\in I} E_i$?

Exercice 1. (4 points=1,5+(0,5+1+1))

1) Soit E un ensemble. On note $\tau = \{\emptyset\} \cup \{\omega \subset E \,|\, {}^c\omega \text{ est fini}\}$. Montrer que τ est une topologie sur E (on l'appelle topologie de Zariski sur E).
2) On munit $\mathbb{N}$ de la topologie de Zariski. On note π la topologie produit (associée) sur $\mathbb{N}^2 = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$. On note τ_2 la topologie de Zariski sur $\mathbb{N}^2$.
a) Soient a et b deux entiers naturels. Justifier que $\{(a,b)\}$ est un fermé pour la topologie π.
b) En déduire que π est plus fine que τ_2.
c) Est-ce que ces deux topologies sont égales ? (Justifier !)

Exercice 2. (7 points=1,5+1+(1+1+0,5+1)+1)

On désigne par $\mathbb{R}^2$ le plan affine euclidien usuel muni d'un repère d'origine O et PQ la distance euclidienne usuelle entre P et $Q \in \mathbb{R}^2$. On pose $d(P,Q) = PQ$ si P et Q sont alignés avec l'origine O et $d(P,Q) = OP + OQ$ si P et Q ne sont pas alignés avec O.
1) Montrer que d est une distance sur $\mathbb{R}^2$ (on l'appelle la "distance SNCF").
Dans la suite, on note τ la topologie associée à la distance d sur $\mathbb{R}^2$. On note τ_2 la topologie associée à la distance euclidienne sur $\mathbb{R}^2$.
2) Montrer que τ est plus fine que τ_2. Indication: on pourra établir une inégalité entre les deux distances et conclure.
3) Soit $H = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, y > 0\}$. On note $\overline{H}$ l'adhérence de H pour τ.
a) Montrer que $\overline{H} \subset \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, y \geq 0\}$.
b) Montrer $O \in \overline{H}$.
c) Soit $P = (x,0)$ avec x non nul. Pour tout $Q \in H$, montrer que $d(P,Q) \geq OP$.
d) En déduire $\overline{H}$.
3) Soit Γ le cercle unité de $\mathbb{R}^2$. Déterminer la topologie induite τ_Γ par τ sur Γ. Indication : on calculera $d(P,Q)$ pour tous $P, Q \in \Gamma$ distincts.

Exercice 3.(6 points=1+1,5+(0,5+1+0,5)+1,5)

On note ℓ^∞ l'espace vectoriel des suites réelles bornées indicées par $\mathbb{N}$, muni de la norme sup.: $\|a\|_\infty = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} |a_n|$, où $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

On définit T, l'application linéaire de ℓ^∞ dans ℓ^∞ suivante: pour $a \in \ell^\infty$ et $n \in \mathbb{N}$:

$$(T(a))_0 = 0 \qquad \text{et} \qquad (T(a))_n = \sum_{p=1}^{\infty} \frac{a_p}{3^{pn}} \text{ pour } n \geq 1.$$

1) Montrer que T est bien définie.

2) Justifier que T est continue. Calculer $|||T|||$.

3) Soit $(x^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy dans ℓ^∞. La n^{ieme} coordonnée de $x^{(k)}$ est naturellement notée $x_n^{(k)}$.

i) Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, la suite $\left(x_n^{(k)}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy de réels.

ii) Montrer que $(x^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ est convergente dans ℓ^∞.

iii) Quelle propriété de ℓ^∞ est ainsi justifiée ?

4) Montrer qu'il existe $a \in \ell^\infty$ telle que pour tout $n \geq 1$:

$$a_n = \cos(n) + \sum_{p=1}^{\infty} \frac{a_p}{3^{pn}}$$

(on ne cherchera pas à trouver a !).