

Examen TOPOLOGIE

Les calculatrices et les documents sont interdits.
La rédaction sera prise en compte dans la notation.

Questions de cours. (3,5 points=0,5+1+2)

- 1) Qu'est qu'un espace topologique séparable?
- 2) Qu'est que la topologie produit sur un produit quelconque d'espaces topologiques?
- 3) Démontrer qu'un produit dénombrable d'espaces topologiques séparables est séparable.

Exercice 1. (2 points)

Soit $(r_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de rationnels positifs qui converge vers $\ell \notin \mathbb{Q}$. On écrit $r_n = \frac{a_n}{b_n}$, où $a_n \in \mathbb{N}$ et $b_n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = +\infty$.

Indication: raisonner par l'absurde en supposant que $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne diverge pas vers l'infini.

Exercice 2. (4 points=2+2)

Soit X un ensemble muni de la topologie discrète.

- 1) Rappeler ce qu'est la topologie discrète. Est-ce un espace métrisable ? (Justifier).
- 2) Montrer que les parties compactes sont les parties finies de X .

Exercice 3. (5 points=[(0,5+1)+1]+[1+1,5])

Dans tout cet exercice (X, τ) est un espace topologique compact.

I]1) Soient $x \in X$ et F un fermé de X tels que $x \notin F$.

- a) Est-ce que F est une partie compacte de X ? (Justifier).
 - b) Montrer qu'il existe deux ouverts disjoints $\omega_x \in \tau$ et $\omega'_x \in \tau$ tels que $x \in \omega_x$ et $F \subset \omega'_x$.
- 2) Soient F et F' deux fermés disjoints de X .

Déduire de ce qui précède qu'il existe deux ouverts disjoints Ω et Ω' tels que $F \subset \Omega$ et $F' \subset \Omega'$.
Comment s'appelle cette propriété de l'espace topologique (X, τ) ?

II] On rappelle qu'un espace topologique est localement compact si tout élément admet une base de voisinages compacts.

- 1) On fixe $a \in X$ et V un voisinage de a . Montrer qu'il existe un fermé F tel que $a \notin F$ et $V^c \subset F$.
- 2) Montrer qu'un espace compact est localement compact.

Exercice 4. (5,5 points=1+2+0,5+2)

On note E l'espace vectoriel des applications continues sur $[0, 1]$ à valeurs réelles, muni de la norme sup.: $\|f\|_\infty = \sup_{x \in [0, 1]} |f(x)|$.

On définit T , l'application linéaire de E dans E suivante: pour $f \in E$ et $x \in [0, 1]$:

$$T(f)(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n+1}} f\left(\frac{x}{2^n}\right).$$

- 1) Montrer que T est bien définie.
- 2) Justifier que T est continue. Calculer $\|T\|$.
- 3) T est-elle lipschitzienne? Si oui, avec quelle constante?

4) Montrer qu'il existe $f \in E$ telle que pour tout $x \in [0, 1]$: $f(x) = x^4 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n+1}} f\left(\frac{x}{2^n}\right)$

(on ne cherchera pas à trouver f !). Indication: on pourra considérer $L(f) = T(f) + X^4$.