Examen TOPOLOGIE - Session 2

Les calculatrices et les documents sont interdits.
La rédaction sera prise en compte dans la notation.

Questions de cours. (2 points)
Citer le théorème du point fixe.

Exercice 1. (7 points=1,5+[(1+0,5)+(1+0,5+0,5)+0,5]+[1+0,5])

I) On considère $\mathbb{N}$, muni de la topologie grossière et l'identité I sur cet espace. L'ensemble $\{n \in \mathbb{N} |\, I(n) = 1\}$ est-il fermé, est-il dense ?

II) Soient (X, τ) et (X', τ') deux espaces topologiques. On suppose que τ' est séparée. Soient f et g deux applications continues de X dans X'.

1) On veut montrer que $N = \{x \in X |\, f(x) = g(x)\}$ est un fermé. On a deux méthodes:
a) Première méthode. Soit $x \in N^c$.
i) Justifier qu'il existe $U \in \tau$ tel que $x \in U$ et pour tout $x' \in U$, $f(x') \neq g(x')$.
ii) Conclure.
b) Seconde méthode. On munit $X' \times X'$ de la topologie produit π.
i) Montrer que l'application p de X dans $X' \times X'$, qui à $x \in X$ associe $(f(x), g(x))$, est continue.
ii) Rappeler pourquoi la diagonale $D = \{(y, y) |\, y \in X'\}$ est fermée dans $X' \times X'$.
iii) Conclure.
c) Est-ce encore vrai si τ' n'est pas séparée ?
2) a) On suppose que f et g coïncident sur une partie dense. Montrer que $f = g$.
b) Est-ce encore vrai si τ' n'est pas séparée ?

Exercice 2. (4,5 points=1+1+1,5+1)

Soit n un entier $n \geq 1$. L'espace $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ des matrices réelles carrées d'ordre n est muni de la norme $\|A\| = \max\limits_{1 \leq j \leq n} \sum\limits_{i=1}^{n} |a_{i,j}|$.

1) Montrer que c'est effectivement une norme.

2) Justifier pourquoi la série $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k$ converge dans $\big(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \|.\|\big)$ vers une matrice, que l'on notera $\exp(A)$.

3) Montrer que l'application transposée $A \to {}^tA$ est une application linéaire continue de $\big(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \|.\|\big)$ dans lui-même, dont on montrera que la norme vaut n (ne pas rejustifier la linéarité).

4) Montrer que la transposée de $\exp(A)$ est $\exp({}^tA)$.

Exercice 3. (6,5 points=0,5+1+1+1+0,5+1+1,5)

Soit (K, d) un espace métrique compact. On considère une application $f : K \to K$ vérifiant pour tous $x, y \in K$

$$d\big(f(x), f(y)\big) \geq d(x, y)$$

1) Justifier que f est injective.

Soient $a, b \in K$. On note f^n l'itérée n-ième de f, i.e. $f \circ \cdots \circ f$ (n fois, avec $n \geq 1$).

2) Montrer qu'il existe une suite strictement croissante d'entiers $(n_j)_{j\geq 1}$ telle que $(f^{n_j}(a))_{j\geq 1}$ et $(f^{n_j}(b))_{j\geq 1}$ convergent.

3) En déduire que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un entier $p \geq 1$ tel que $d\big(a, f^p(a)\big) \leq \varepsilon$ et $d\big(b, f^p(b)\big) \leq \varepsilon$.

4) En déduire que f est une isométrie.

5) f est-elle continue? (Justifier !)

6) Montrer que $f(K)$ est dense dans K.

7) Conclure que f est bijective.