

Examen TOPOLOGIE

session 2

Les calculatrices et les documents sont interdits.
La rédaction sera prise en compte dans la notation.

Questions de cours (3 points=1+2)

Soit E un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel. Cet espace est muni de deux normes : $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_2$. On note τ_1 (resp. τ_2) la topologie associée à $\|\cdot\|_1$ (resp. $\|\cdot\|_2$).

- a) A quelle condition (nécessaire et suffisante) sur les normes, τ_1 est-elle plus fine que τ_2 ?
- b) Démontrer ce résultat.

Exercice 1. (2 points=1+1)

Soit (E, τ) un espace topologique.

- 1) Soit $A \subset E$. On suppose que A est d'intérieur vide. Montrer que $A^c = E \setminus A$ est dense.
- 2) Soient $A, B \subset E$, où B est fermée. On suppose que $E = A \cup B$ et que A est d'intérieur vide. Montrer que $B = E$.

Exercice 2. (3,5 points=1,5+0,5+1,5)

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé (sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). On suppose que K est une partie convexe et compacte de E . Soit T une contraction sur K i.e. une application de K dans K telle que $\|T(x) - T(y)\| \leq \|x - y\|$ pour tous $x, y \in K$.

- 1) On fixe $k \in K$. On pose $T_n = (1 - \frac{1}{n})T + \frac{1}{n}k$, pour tout entier $n \geq 1$.

On fixe un entier $n \geq 1$. Justifier que T_n est bien définie de K dans K et montrer que T_n admet un unique point fixe a_n .

- 2) L'application T est-elle continue ? On justifiera la réponse.
- 3) Montrer que T admet (au moins) un point fixe.

Exercice 3. (11,5 points=(1+1)+(1+1+3)+1,5+0,5+1+1,5)

Pour $n \in \mathbb{N}$, E_n est l'ensemble $\{0, 1\}$, muni de la distance induite par la valeur absolue.

- 1)a) Décrire les ouverts de E_n . Quel nom porte la topologie sur E_n ?
- b) E_n est-il connexe ?

Soit $E = \prod_{n \in \mathbb{N}} E_n = \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$, muni de la topologie produit. On rappelle que E est métrisable,

par exemple, pour $d(x, y) = \sup_{n \in \mathbb{N}} \frac{|x_n - y_n|}{2^n}$, où $x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $y = (y_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

- 2)a) Justifier que E est compact.
- b) Montrer que E n'est pas connexe.
- c) Montrer que l'application suivante est bien définie, lipschitzienne et injective.

$$\varphi : (E, d) \longrightarrow ([0, 1], |\cdot|)$$

$$x \longmapsto \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{2x_n}{3^{n+1}}$$

On note $K = \varphi(E)$ (ensemble triadique de Cantor) et $\tilde{\varphi} : E \rightarrow K$ définie par $\tilde{\varphi}(x) = \varphi(x)$ pour tout $x \in E$.

- 3) Montrer que $\tilde{\varphi}$ est un homéomorphisme de E sur K et que K est compact.
- 4) K est-il connexe ?
- 5) Soient $f : (X, \tau) \rightarrow (X', \tau')$ un homéomorphisme entre deux espaces topologiques. Pour $x \in X$, on note C_x la composante connexe de x dans X . Montrer que $f(C_x)$ est la composante connexe de $f(x)$ dans X' .
- 6) En déduire les composantes connexes de K .