Examen TOPOLOGIE

Les calculatrices et les documents sont interdits.
La rédaction sera prise en compte dans la notation.

Questions de cours - Exercice. (8,5 points=(1+2+1)+(1+1+1+1,5))

1)a) Enoncer le théorème du point fixe.

b) Démontrer ce théorème. Pour cela, on considèrera une suite récurrente $x_{n+1} = f(x_n)$ et on montrera qu'elle est de Cauchy.

c) Une carte de la ville de Lens tombe par terre dans la salle d'examen. Montrer qu'il y a exactement un point de cette carte qui est exactement sur le point qu'il représente.

2) Soit $(E_i)_{i\in I}$ une famille (indicée par un ensemble I) d'espaces topologiques (munis chacun d'une topologie τ_i).

a) Quelle est la définition de la topologie produit sur $\prod\limits_{i\in I} E_i$?

b) Montrer que les applications coordonnées sont continues et ouvertes.

c) Justifier qu'elles ne sont pas fermées en général.

d) On suppose que chacun des (E_i, τ_i) est non vide et séparé. Montrer que si $\prod\limits_{i\in I} E_i$ est compact (pour la topologie produit) alors chacun des (E_i, τ_i) est compact. En déduire qu'alors les applications coordonnées sont fermées.

Exercice 1. (4 points=1,5+0,5+2)

Soit (X, τ) un espace topologique séparé. On rappelle que $x \in X$ est un point d'accumulation de $A \subset X$ si pour tout voisinage V de x, $V \cap A$ contient un élément différent de x. On notera A' l'ensemble des points d'accumulation de A.

1) Montrer que $\bar{A} = A' \cup A$.

2) En déduire que A est fermé si et seulement si $A' \subset A$.

3) Montrer que A' est fermé.

Exercice 2. (11,5 points=(1+1)+(1+1+3)+1,5+0,5+1+1,5)

Pour $n \in \mathbb{N}$, E_n est l'ensemble $\{0, 1\}$, muni de la distance induite par la valeur absolue.

1)a) Décrire les ouverts de E_n. Quel nom porte la topologie sur E_n ?

b) E_n est-il connexe ?

Soit $E = \prod\limits_{n\in\mathbb{N}} E_n = \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$, muni de la topologie produit. On rappelle que E est métrisable, par exemple, pour $d(x, y) = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} \dfrac{|x_n - y_n|}{2^n}$, où $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $y = (y_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

2)a) Justifier que E est compact.

b) Montrer que E n'est pas connexe.

c) Montrer que l'application suivante est bien définie, lipschitzienne et injective.

$$\begin{array}{rccc} \varphi : & (E, d) & \longrightarrow & ([0, 1], |.|) \\ & x & \longmapsto & \displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{2x_n}{3^{n+1}} \end{array}$$

On note $K = \varphi(E)$ (ensemble triadique de Cantor) et $\tilde{\varphi} : E \to K$ définie par $\tilde{\varphi}(x) = \varphi(x)$ pour tout $x \in E$.

3) Montrer que $\tilde{\varphi}$ est un homéomorphisme de E sur K et que K est compact.

4) K est-il connexe ?

5) Soient $f : (X, \tau) \to (X', \tau')$ un homéomorphisme entre deux espaces topologiques. Pour $x \in X$, on note C_x la composante connexe de x dans X. Montrer que $f(C_x)$ est la composante connexe de $f(x)$ dans X'.

6) En déduire les composantes connexes de K.