Université d'Artois. Licence AR1: Topologie
31 Août 2004. Durée 4h

Examen Analyse Réelle 1

Les calculatrices et les documents sont interdits.

La rédaction sera prise en compte dans la notation.

Cours-exercice. (8 points=1+(2+2+1)+2)

1) Enoncer le théorème de Baire.

2) Démontrer ce théorème. Pour cela, on considèrera une suite d'ouverts $(\Omega_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (répondant aux hypothèses) et un ouvert non vide ω. Puis,

a) Construire une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et une suite de réels $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ décroissante vers 0 telles que $\bar{B}(x_0, r_0) \subset \Omega_0 \cap \omega$ et pour tout $n \geq 1$, $\bar{B}(x_n, r_n) \subset \Omega_n \cap \overset{\circ}{B}(x_{n-1}, r_{n-1})$.

b) Montrer que $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}^*} \bar{B}(x_n, r_n)$ est non vide.

c) Conclure.

3) La droite réelle est munie de sa topologie usuelle. Montrer que l'ensemble des rationnels n'est pas une intersection dénombrable d'ouverts (de $\mathbb{R}$).

Exercice 1.(4,5 points=1+2+1,5)

Soit $(E, \|.\|)$ un espace vectoriel normé de dimension supérieure ou égale à 2. On note S_E la sphère unité de E.

1) Montrer que S_E est connexe par arc.

2) Soient $R > 0$ et $a \in E$. Montrer que l'application suivante est un homéomorphisme (l'espace de départ est évidemment muni de la topologie produit)

$$\begin{array}{rcl} J \ : \ S_E \times]R, +\infty[& \longrightarrow & E \setminus \bar{B}(a, R) \\ (x, r) & \longmapsto & a + rx \end{array}$$

3) En déduire que le complémentaire d'une boule est connexe.

Exercice 2.(3 points=2+1)

Soient E un ensemble muni d'une topologie τ et $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence sur E. On notera $\dot{x}$ la classe d'un élément de x de E. On note alors comme d'habitude $E/\mathcal{R}$ l'ensemble quotient correspondant, c'est à dire l'ensemble des classes d'équivalence. Enfin, π désigne la surjection canonique : $\pi : x \in E \longmapsto \dot{x}$.

On note $\tilde{\tau}$ les parties A de $E/\mathcal{R}$ telles que $\pi^{-1}(A) \in \tau$.

1) Montrer que $\tilde{\tau}$ est une topologie sur $E/\mathcal{R}$.

2) Justifier que $\tilde{\tau}$ est la topologie la plus fine sur $E/\mathcal{R}$ rendant π continue.

Exercice 3.(6 points=3+1+2)

Soit (X, d) un espace métrique compact. On considère $f : X \to X$ une application vérifiant pour tous $x, x' \in X$: $d(f(x), f(x')) \geq d(x, x')$. Enfin, comme d'habitude, pour tout entier $n \geq 1$, f^n désigne l'itérée $f \circ \cdots \circ f$ (n fois).

1) On fixe x et y dans X. Montrer qu'il existe une suite strictement croissante d'entiers (n_k) telle que les suites $\left(f^{n_k}(x)\right)_{k\in\mathbb{N}}$ et $\left(f^{n_k}(y)\right)_{k\in\mathbb{N}}$ soient de Cauchy.

En déduire que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un entier $p \geq 1$ tel que $d(x, f^p(x)) \leq \varepsilon$ et $d(y, f^p(y)) \leq \varepsilon$.

2) En déduire que f est une isométrie.

3) Déduire du 1. que $X = \overline{f(X)}$ puis conclure que f est surjective.