Université d'Artois
Licence AR1: Topologie
Septembre 2003.
Durée 4h

Examen Analyse Réelle 1

Les calculatrices et les documents sont interdits.

La rédaction sera prise en compte dans la notation.

Question de cours. (6 points=1+(2+2+1))

1) Enoncer le théorème de Baire.
2) Démontrer ce théorème. Pour cela, on considèrera une suite d'ouverts $(\Omega_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (répondant aux hypothèses) et un ouvert non vide ω. Puis,
a) Construire une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et une suite de réels $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ décroissante vers 0 telles que $\bar{B}(x_0,r_0)\subset\Omega_0\cap\omega$ et pour tout $n\geq 1$, $\bar{B}(x_n,r_n)\subset\Omega_n\cap\overset{\circ}{B}(x_{n-1},r_{n-1})$.
b) Montrer que $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}^*}\bar{B}(x_n,r_n)$ est non vide.
c) Conclure.

Exercice 1.(2,5=1+1+0,5 points)

1) Soient $a<b$ deux réels. Soit n_o un entier supérieur à $\dfrac{1}{b-a}$. Montrer qu'il existe $k\in\mathbb{Z}$ et un entier $n\geq n_0$ tels que $\ln(n)+2k\pi\in[a,b]$.
Pour $n\in\mathbb{N}$, $n\geq 1$, on pose : $u_n=\sin(\ln(n))$.
2) Montrer que cette suite est dense dans $[-1,1]$.
3) Est-ce que cette suite converge ?

Exercice 2.(3,5 points=1,5+0,5+1,5)

Dans $(\mathbb{R}^2,\|.\|_2)$, on considère

$$E=\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*}\Big\{(\frac{1}{n},y)|\,y\in\mathbb{R}\Big\}\cup\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*}\Big\{(x,n)|\,\frac{1}{n+1}\leq x\leq\frac{1}{n}\Big\}.$$

1) Montrer que E est connexe.
2) Est-ce que son adhérence est connexe ?
3) Montrer que $\bar{E}$ n'est pas connexe par arcs.

Exercice 3.(9 points=3+1+1+1+3)

Soit (E,τ) un espace localement compact (i.e. la topologie est séparée et tout point admet une base de voisinages compacts) et non compact. Soit $x_0\notin E$, on considère l'ensemble $K=E\cup\{x_0\}$. Soit τ' l'ensemble des parties A de K qui vérifient : $A\in\tau$ ou $A=(E\backslash K_0)\cup\{x_0\}$, où K_0 est un compact de E.
1) Montrer que τ' est une topologie sur K.
2)a) Montrer que τ' est séparée.
2)b) Montrer que la topologie induite par τ' sur E est τ.
2)c) Montrer que x_0 est un point d'accumulation de (K,τ').
3) Montrer que (K,τ') est compact.