

Examen Analyse Réelle 1

Les calculatrices et les documents sont interdits.

La rédaction sera prise en compte dans la notation.

Exercice 1. (6 points=(1,5+(0,5+1+1))+(1+1))

1) Question de cours.

- a) Énoncer le théorème de Baire.
- b) Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace de Banach. On veut montrer qu'il n'admet pas de base dénombrable. Pour cela, on suppose qu'il admet une base $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note F_n l'espace vectoriel engendré par $e_0, \dots, e_n$.
 - i) Justifier que F_n est fermé.
 - ii) Montrer que F_n est d'intérieur vide.
 - iii) Conclure.

2) a) Soit (E, d) un ensemble muni de la métrique discrète. Montrer que c'est un espace complet.

- b) Est-ce que le résultat du 1.b. est encore valable pour tout espace métrique ?

Exercice 2.(7 points=(1+0,5+1+1)+1+(1+0,5+1))

Soit (E, d) un espace métrique. On dit que E est bien enchaîné si pour tous $x, y \in E$ et tout $\varepsilon > 0$, il existe un nombre fini de points $x_0, \dots, x_n \in E$ tels que $x_0 = x$, $x_n = y$ et $d(x_i, x_{i+1}) < \varepsilon$ ($0 \leq i \leq n-1$).

1) On suppose que E est connexe. On fixe $\varepsilon > 0$. Pour $x \in E$, on considère l'ensemble $E_x = \{y \in E \mid \text{il existe un nombre fini de points } x_0, \dots, x_n \in E \text{ tels que } x_0 = x, x_n = y \text{ et } d(x_i, x_{i+1}) < \varepsilon; 0 \leq i \leq n-1\}$.

- a) Montrer que pour tout $x \in E$, E_x est ouvert.
- b) Montrer que $\bigcup_{x \in E} E_x = E$.
- c) Soient $x, x' \in E$. Montrer que $E_x = E_{x'}$ ou $E_x \cap E_{x'} = \emptyset$.
- d) Montrer que E est bien enchaîné.

2) Montrer que l'ensemble des rationnels (muni de la valeur absolue) est bien enchaîné. Est-ce que la réciproque du 1. est vraie ?

- 3) On suppose que E est bien enchaîné et compact. Soit φ une application continue de E dans $\{0, 1\}$. L'ensemble $\{0, 1\}$ est muni de la topologie associée à la valeur absolue.
- a) On fixe $\varepsilon_0 = 1$. Montrer qu'il existe $\eta > 0$ tel que pour tous $x, y \in E$:

$$d(x, y) \leq \eta \implies |\varphi(x) - \varphi(y)| < \varepsilon_0.$$

- b) Montrer que φ est constante.
- c) Que peut-on en déduire pour E ?

Exercice 3. (11 points = $(0,5+0,5)+(0,5+0,5+0,5)+1+(0,5+0,5)+1+(1+1+2,5+1)$)

Soit (X, τ) un espace topologique. $\mathbb{R}$ est muni de sa topologie usuelle. On dit qu'une application $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ est semi-continue inférieurement (on notera *sci* en abrégé) en $x_0 \in X$ si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists V \in \mathcal{V}(x_0), \forall x \in V, f(x) \geq f(x_0) - \varepsilon.$$

($\mathcal{V}(x_0)$ désigne l'ensemble des voisinages de x_0)

Bien sûr, une application est dite sci sur X si elle l'est en tout point de X .

De même, on dit qu'une application $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ est semi-continue supérieurement (on notera *scs* en abrégé) en $x_0 \in X$ si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists V \in \mathcal{V}(x_0), \forall x \in V, f(x) \leq f(x_0) + \varepsilon$$

et une application est dite scs sur X si elle l'est en tout point de X .

- 1) a) Montrer qu'une application $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ continue en $x_0 \in X$ est sci et scs en x_0 .
- b) Réciproquement, montrer qu'une application $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ sci et scs en $x_0 \in X$ est continue en x_0 .
- 2) Soient f et g sci en $x_0 \in X$ et $\alpha \in \mathbb{R}^+$.
- a) Montrer que $f + g$ est sci en x_0 .
- b) Montrer que αf est sci en x_0 .
- c) Montrer que $\max(f, g)$ est sci en x_0 .

On admet que l'on montre de même que si f et g sont scs en $x_0 \in X$ alors $f + g$, αf et $\min(f, g)$ sont scs en x_0 .

3) Montrer que $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ est sci si et seulement si pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\{x \in X \mid f(x) \leq t\}$ est fermé. On admet que l'on montre de même que $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ est scs si et seulement si pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\{x \in X \mid f(x) \geq t\}$ est fermé.

- 4) a) Montrer que la fonction indicatrice d'un ouvert est sci.
- b) Montrer que la fonction indicatrice d'un fermé est scs.
- 5) Soit f_i (pour $i \in I$, un ensemble quelconque) une famille d'applications continues de X dans $\mathbb{R}$ telles que pour tout $x \in X$, $f(x) = \sup_{i \in I} f_i(x)$ est fini. Montrer que f est sci.

Dans toute la suite de cet exercice, l'espace est un espace métrique (X, d) .

6) Soit $f : X \rightarrow \mathbb{R}^{+*}$ sci. On pose pour tout entier n et tout $x \in X$:

$$f_n(x) = \inf_{a \in X} f(a) + nd(x, a).$$

- a) Montrer que pour tous $x, y \in X$, $|f_n(x) - f_n(y)| \leq nd(x, y)$. En déduire que f_n est continue.
- b) Montrer que f_n est à valeurs dans $\mathbb{R}^{+*}$.
- c) Montrer que pour tout $x \in X$, $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante vers $f(x)$.
- d) En déduire que toute fonction semi-continue inférieurement est limite simple d'une suite croissante de fonctions continues.