

Examen Analyse Réelle 1

Les calculatrices et les documents sont interdits.

La rédaction sera prise en compte dans la notation.

Question de cours. (4 points=1+3)

- 1) Énoncer le théorème de Heine.
- 2) Démontrer ce théorème.

Exercice 1. (2 points)

Soient (X, τ) et (X', τ') des espaces topologiques. On suppose que (X, τ) est connexe (et non vide). Soit $f : X \rightarrow X'$, une application localement constante, c'est à dire que pour tout x dans X , il existe un voisinage de x sur lequel f est constante.

Montrer que f est constante.

Exercice 2. (7 points=1,5+1+1+1+1+1,5)

On désigne par PQ la distance euclidienne usuelle entre P et $Q \in \mathbb{R}^2$ et on pose $d(P, Q) = PQ$ si P et Q sont alignés avec l'origine O et $d(P, Q) = OP + OQ$ si P et Q ne sont pas alignés avec O .

- 1) Montrer que d est une distance sur $\mathbb{R}^2$ (on l'appelle la "distance SNCF").

Dans la suite, on note τ la topologie associée à la distance d sur $\mathbb{R}^2$. On note τ_2 la topologie associée à la distance euclidienne sur $\mathbb{R}^2$.

- 2) Soit $H = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 0\}$. On note $\bar{H}$ l'adhérence de H pour τ .

a) Montrer que τ est plus fine que τ_2 .

b) En déduire que $\bar{H} \subset \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geq 0\}$.

c) Montrer $O \in \bar{H}$.

d) Soit $P = (x, 0)$ avec x non nul. Pour tout $Q \in H$, montrer que $d(P, Q) \geq OP$. En déduire $\bar{H}$.

- 3) Soit Γ le cercle unité de $\mathbb{R}^2$. Déterminer la topologie induite τ_Γ par τ sur Γ .

Exercice 3. (8 points=(1+1)+0,5+(1,5+0,5)+(0,5+2+1))

Soient $(E, \|\cdot\|)$ un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel normé et F un sous-espace vectoriel de E . On notera $\dot{x}$ la classe de $x \in E$, dans E/F . On considère l'application

$$\begin{aligned} N : E/F &\longrightarrow \mathbb{R}^+ \\ \dot{x} &\longmapsto \inf_{y \in \dot{x}} \|y\| \end{aligned}$$

1)i) Montrer que N est une semi-norme sur E/F (c'est à dire que N vérifie les axiomes d'une norme sans vérifier $N(v) = 0 \Rightarrow v = 0$).

ii) Décrire les $x \in E$ tels que $N(\dot{x}) = 0$. A quelle condition (nécessaire et suffisante) sur F , $(E/F, N)$ est un espace vectoriel normé ?

Dans toute la suite, on suppose que cette condition sur F est remplie, $(E/F, N)$ est donc un espace vectoriel normé.

2) Montrer que la surjection canonique π est continue.

3) On suppose dans cette question que F admet un sous-espace supplémentaire G de dimension finie. On note P la projection canonique de E sur G . On note f l'application de $(E/F, N)$ dans $(E, \|\cdot\|)$ qui à $\dot{x}$ associe $P(x)$.

i) Montrer que f est bien définie, linéaire et continue.

ii) En déduire que P est continue.

4) On suppose dans cette question que E est un espace de Banach. On considère une série de terme général $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ normalement convergente dans $(E/F, N)$.

a) Montrer qu'il existe une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de E telle que pour tout entier n , $\pi(x_n) = v_n$ et $\|x_n\| \leq N(v_n) + 2^{-n}$.

b) Montrer que la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} x_n$ converge dans $(E, \|\cdot\|)$ puis que la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} v_n$ converge dans $(E/F, N)$.

c) Montrer que $(E/F, N)$ est un espace de Banach.