Université d'Artois
Licence AR1: Topologie
22 Janvier 2002.
Durée 4h

Examen Analyse Réelle 1

Les calculatrices et les documents sont interdits.

La rédaction sera prise en compte dans la notation.

Question de cours. (4 points=1+3)

1) Enoncer le théorème du point fixe.
2) Démontrer le théorème du point fixe.

Exercice 1.(4 points=1,5+0,5+2)

Soit $(E, \|.\|)$ un espace vectoriel normé (sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). On suppose que K est une partie convexe et compacte de E. Soit T une contraction sur K i.e. une application de K dans K telle que $\|T(x) - T(y)\| \leq \|x - y\|$ pour tous $x, y \in K$.

1)On fixe $k \in K$. On pose $T_n = (1 - \dfrac{1}{n})T + \dfrac{1}{n}k$, pour tout entier $n \geq 1$.

On fixe un entier $n \geq 1$. Justifier que T_n est bien définie de K dans K et montrer que T_n admet un unique point fixe a_n.

2) L'application T est-elle continue ? On justifiera la réponse.

3) En utilisant la compacité de K, montrer que T admet un point fixe.

Exercice 2. (2 points)

Soient (X, τ) et (X', τ') sont des espaces topologiques. On suppose que (X, τ) est connexe (et non vide). Soit $f : X \to X'$, une application localement constante, c'est à dire que pour tout x dans X, il existe un voisinage de x sur lequel f est constante.
Montrer que f est constante. Indication : soit $a \in X$, considérer $E = \{x \in X \,|\, f(x) = f(a)\}$.

Problème. (14 points=(0,5+1+1)+(1+1)+(1,5+1+0,5+0,5)+(0,5+0,5+1)+(1,5+0,5+1+1))

Pour A et B des parties de $\mathbb{N}$ (l'ensemble des entiers naturels), on définit : $d(A,B) = \Big(\min(A\Delta B)+1\Big)^{-1}$ si $A \neq B$ et $d(A,B) = 0$ si $A = B$. On rappelle que $A\Delta B = (A\cup B)\setminus(A\cap B)$.

1)a) Montrer que, pour tout $m \in \mathbb{N}$ et tous $A, B \subset \mathbb{N}$,

$$d(A,B) < \frac{1}{m+1} \Longleftrightarrow A \cap [0,m] = B \cap [0,m].$$

b) Montrer que d est une distance sur l'ensemble des parties de $\mathbb{N}$.

c) Soit $A \subset \mathbb{N}$. Montrer qu'une suite $(A_k)_k$ converge vers A dans $(\mathcal{P}(\mathbb{N}), d)$ si et seulement si : pour tout entier N, il existe un entier k_0 tel que : $\forall k \geq k_0$, $A_k \cap [0,N] = A \cap [0,N]$.

2) Pour $n \in \mathbb{N}$, on munit $K_n = \{0,1\}$ de la topologie discrète.

a) Montrer que la topologie de K_n est métrisable pour la distance $\delta_n(x,y) = \dfrac{1}{n+1}|x-y|$. Soit $K = \prod\limits_{n\in\mathbb{N}} K_n = \{0,1\}^{\mathbb{N}}$, c'est à dire l'espace des suites à valeurs dans $\{0,1\}$, muni de la topologie produit.

b) Montrer que K est un compact dont la topologie est métrisable pour la distance

$$\delta(a,b) = \sup_{n\in\mathbb{N}} \frac{|a_n - b_n|}{n+1}\ , \text{ où } a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in K \text{ et } b = (b_n)_{n\in\mathbb{N}} \in K.$$

(on énoncera soigneusement les résultats du cours utilisés mais on ne les redémontrera pas).

3) Soit $\begin{array}{cccc} \Phi : & (\mathcal{P}(\mathbb{N}), d) & \longrightarrow & (K, \delta) \\ & A & \longmapsto & (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \end{array}$ où $a_n = 1$ si $n \in A$ et $a_n = 0$ sinon.

a)i) Trouver $A \subset \mathbb{N}$ tel que $\Phi(A) = (|\cos(n\pi/2)|)_{n\in\mathbb{N}}$.

ii) Montrer que Φ est bijective.

b) Montrer que Φ est une isométrie, i.e. pour tous $A, B \subset \mathbb{N}$, $\delta(\Phi(A), \Phi(B)) = d(A,B)$.

c) Φ^{-1} est-elle continue ?

d) Montrer que $(\mathcal{P}(\mathbb{N}), d)$ est compact.

4) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit $A_n = \{np|\ p \in \mathbb{N}\}$.

a) Montrer que $(A_n)_n$ est une suite de Cauchy de $(\mathcal{P}(\mathbb{N}), d)$.

b) En déduire que la suite $(A_n)_n$ est convergente.

c) Quelle est sa limite ?

5)a) Soient $m \in \mathbb{N}$ et $A \subset \mathbb{N}$. On définit $F = \{P \subset \mathbb{N}|\ A \cap [0,m] = P \cap [0,m]\}$.

i) Montrer que F est fermé dans $(\mathcal{P}(\mathbb{N}), d)$. Indication : utiliser le 1.c.

ii) Montrer que F est ouvert dans $(\mathcal{P}(\mathbb{N}), d)$. Indication : utiliser le 1.a.

b) Est-ce que $(\mathcal{P}(\mathbb{N}), d)$ est connexe ?

c) Soit $A \subset \mathbb{N}$. On note N_A sa composante connexe dans $(\mathcal{P}(\mathbb{N}), d)$. Pour tout entier m, montrer que $N_A \cap \overset{\circ}{B}(A, \frac{1}{m+1}) = N_A$.

d) En déduire les composantes connexes de $(\mathcal{P}(\mathbb{N}), d)$.