Licence de Mathématiques.
Université d'Artois. 2008-2009.
Session 2. Durée 4h.

INTÉGRATION
EXAMEN

session 2

Exercice 1. (6,5 points=0,5+0,5+1+2+2,5)

1) Soit f un fonction continue sur $\mathbb{R}$ et périodique de période $T > 0$. Montrer que pour tout $a \in \mathbb{R}$, on a $\displaystyle\int_0^T f(t)\,dt = \int_a^{a+T} f(t)\,dt$.

Soit $r \in [0, 1[$.

2) Justifier que $\displaystyle I_r = \int_{-\pi}^{\pi} \ln\left|1 - re^{it}\right| dt$ est bien définie.

3) Montrer que $I_r = \dfrac{1}{2} I_{r^2}$

4) Déterminer $\displaystyle\lim_{m\to+\infty} I_{r^m}$. En déduire la valeur de I_r.

5) Justifier l'existence de $\displaystyle I = \int_{-\pi}^{\pi} \ln\left|1 - e^{it}\right| dt$. Déduire des questions précédentes la valeur de I.

Exercice 2. (4,5 points=2+2,5) *(les deux questions sont indépendantes)*

1) On fixe $\alpha \in [-\pi, \pi]$ et $0 < h < 1$. On considère l'intérieur de la fenêtre de Carleson:

$$\mathcal{W} = \mathcal{W}(\alpha, h) = \big\{(r\cos\theta, r\sin\theta) \in \mathbb{R}^2 |\ 1 - h < r < 1;\ \theta \in]\alpha - h\pi, \alpha + h\pi[\big\}$$

Justifier que $\mathcal{W}$ est λ_2-mesurable et que $\lambda_2(\mathcal{W})$ est fini. Déterminer l'aire de $\mathcal{W}$, i.e. $\lambda_2(\mathcal{W})$.

2) Calculer $\displaystyle\int_D f\, d\lambda_2$ où $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 |\ x^2 < y < 2x^2 \text{ et } \frac{1}{x} < y < \frac{2}{x}\}$ et $f(x, y) = y^3$.

Indication: on effectuera le changement de variable $(x, y) \mapsto \big(\dfrac{y}{x^2}, xy\big)$.

Exercice 3. (4 points=2+2)

Soit $n \in \mathbb{N}$, avec $n \geq 1$. On pose, pour $x \in \mathbb{R}^+$: $f_n(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{-x^n}}{\sqrt{|1-x^2|}}$ quand $x \neq 1$ et $f_n(1) = 0$.

1) Montrer que f_n est intégrable sur $\mathbb{R}^+$.

On pose maintenant $I_n = \displaystyle\int_{\mathbb{R}^+} f_n \, d\lambda = \int_0^{+\infty} f_n(x) \, dx$.

2) Montrer que la suite $(I_n)_{n\geq 1}$ converge et calculer sa limite.

Exercice 4. (5 points=0,5+(1+1)+(1+1,5))

Soient $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré et f (Lebesgue) μ-intégrable.

1) Soit $A \in \mathcal{A}$ une partie négligeable. Que vaut $\displaystyle\int_A f \, d\mu$?

2) On suppose $(B_n)_{n\geq 1}$ est une suite décroissante de parties mesurables. On note $B = \displaystyle\bigcap_{n\geq 1} B_n$.

a) Montrer que la suite de fonctions $f\mathbb{1}_{B_n}$ converge simplement vers $f\mathbb{1}_B$ sur Ω.

b) Montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_{B_n} f \, d\mu = \int_B f \, d\mu$.

3) En déduire:

a) que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_{\{|f|\geq n\}} |f| \, d\mu = 0$.

b) que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$, tel que pour tout $B \in \mathcal{A}$, on a

$$\mu(B) \leq \delta \Longrightarrow \int_B |f| \, d\mu \leq \varepsilon.$$