Licence de Mathématiques.
Université d'Artois. 2008-2009.
Session 1.

INTÉGRATION

Éléments de correction

Exercice 1.

1) Toutes les intégrales sont bien définies (car on intègre des fonctions continues sur des segments). On coupe l'intégrale en trois (Chasles):

$$\int_a^{a+T} f(t)\,dt = \int_a^0 f(t)\,dt + \int_0^T f(t)\,dt + \int_T^{a+T} f(t)\,dt$$

puis on fait le changement de variable $t \mapsto t - T$ dans la dernière intégrale qui vaut donc

$$\int_0^a f(x+T)\,dx = \int_0^a f(x)\,dx$$

car f est T-périodique. D'où le résultat.

2) Il s'agit de l'intégrale de la fonction continue f_r sur un segment avec $f_r(t) = \ln\left|1 - r\mathrm{e}^{it}\right|$. Celle-ci est bien continue comme log d'une fonction strictement positive car $1 - r\mathrm{e}^{it}$ ne s'annule jamais car 1 n'appartient pas au cercle de centre O et de rayon r.

3)a) On fait le changement de variable $t \mapsto t + \pi$ dans $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \ln\left|1 + r\mathrm{e}^{it}\right| dt$ et on obtient, puisque $\mathrm{e}^{i(x-\pi)} = -\mathrm{e}^{ix}$:

$$\int_0^{2\pi} \ln\left|1 - r\mathrm{e}^{ix}\right| dx$$

qui vaut I_r d'après le 1.

b) On remarque que $1 - r^2\mathrm{e}^{2it} = \left(1 - r\mathrm{e}^{it}\right)\left(1 + r\mathrm{e}^{it}\right)$ donc

$$\int_{-\pi}^{\pi} \ln\left|1 - r^2\mathrm{e}^{2it}\right| dt = \int_{-\pi}^{\pi} \ln\left|1 - r\mathrm{e}^{it}\right| dt + \int_{-\pi}^{\pi} \ln\left|1 + r\mathrm{e}^{it}\right| dt = 2I_r$$

c) On fait le changement de variable $x = 2t$ dans $\int_{-\pi}^{\pi} \ln\left|1 - r^2\mathrm{e}^{2it}\right| dt$ pour obtenir

$$\frac{1}{2}\int_{-2\pi}^{2\pi} \ln\left|1 - r^2\mathrm{e}^{ix}\right| dx = \frac{1}{2}\int_{-2\pi}^{0} \ln\left|1 - r^2\mathrm{e}^{ix}\right| dx + \frac{1}{2}\int_{0}^{2\pi} \ln\left|1 - r^2\mathrm{e}^{ix}\right| dx$$

or chacune de ces intégrales vaut I_{r^2} d'après le 1. Donc $I_r = \dfrac{1}{2} I_{r^2}$.

4) On a pour tout $m \in \mathbb{N}$ avec $m \geq 1$ (on a alors bien $r^m > 1$ aussi):

$$I_{r^m} = 2\pi \ln(r^m) + \int_{-\pi}^{\pi} \ln\left|r^{-m} - \mathrm{e}^{2it}\right| dt$$

Or pour tout $t \in [-\pi, \pi]$, on a $\ln\left|r^{-m} - \mathrm{e}^{2it}\right| \longrightarrow \ln\left|\mathrm{e}^{2it}\right| = 0$ quand $m \to +\infty$. D'autre part, pour tout $m \in \mathbb{N}$ avec $m \geq 1$: on a $1 - \dfrac{1}{r} \leq 1 - \dfrac{1}{r^m} \leq \left|r^{-m} - \mathrm{e}^{2it}\right| \leq 2$ donc, pour tout $t \in [-\pi, \pi]$:

$$\left|\ln\left|r^{-m} - \mathrm{e}^{2it}\right|\right| \leq \max\Big(\ln 2, \ln(r/r-1)\Big)$$

et cette fonction constante est intégrable puisqu'ici la mesure est finie (on intègre sur un segment contre la mesure de Lebesgue).

On peut alors appliquer le théorème de convergence dominée pour conclure que

$$\lim_{m\to+\infty} \int_{-\pi}^{\pi} \ln\left|r^{-m} - \mathrm{e}^{2it}\right| dt = 0$$

Ainsi $\lim\limits_{m\to+\infty} \dfrac{1}{m} I_{r^m} = 2\pi \ln(r)$.

Enfin, d'après le 3.c, on a par récurrence : $I_r = \frac{1}{2^s} I_{r^{2^s}}$ pour tout $s \in \mathbb{N}$, donc en passant à la limite: $I_r = 2\pi \ln(r)$.

Exercice 2. 1) $f : t \mapsto \mathrm{e}^{-t^2}$ est continue sur $\mathbb{R}^+$ donc y est localement Riemann-intégrable. Enfin, pour $t \geq 1$: $0 \leq \mathrm{e}^{-t^2} \leq \mathrm{e}^{-t}$ dont l'intégrale généralisée converge notoirement puisque $\int_0^X \mathrm{e}^{-t}\, dt = 1 - \mathrm{e}^{-X} \to 1$ quand $X \to +\infty$.

D'autre part, puisque l'intégrale généralisée de $f = |f|$ converge, alors elle est Lebesgue intégrable sur $\mathbb{R}^+$ et de plus les deux intégrales coïncident (cours).

2) Encore une fois, il suffit de justifier que l'intégrale généralisée de g_x converge. Cette fonction est continue sur $\mathbb{R}^+$, positive et majorée par $\dfrac{1}{1+t^2}$ dont l'intégrale généralisée converge d'après le critère de Riemann ($2 > 1$); ou encore parce que tout simplement une primitive est $arctan$ qui a une limite en l'infini.

3) On va appliquer le théorème du cours (conséquence du théorème de convergence dominée):

Pour tout $x \geq 0$, on a $0 \leq g_x(t) \leq \dfrac{1}{1+t^2}$, qui est Lebesgue intégrable sur $\mathbb{R}^+$ (et indépendante de x).

D'autre part, pour tout $t \in \mathbb{R}^+$, $x \in \mathbb{R}^+ \mapsto g_x(t)$ est continue.

On a donc la continuité de G.

4) Toujours avec le théorème de convergence dominée:

On utilise la même majoration de $g_x(t)$ uniformément en x.

On a pour presque tout $t \in \mathbb{R}^+$ (en fait pour tout $t \in \mathbb{R}^{+*}$ et $\{0\}$ est un singleton donc de mesure λ_1 nulle): $\lim\limits_{x\to+\infty} g_x(t) = 0$.

Donc, on a $\lim\limits_{x\to+\infty} G(x) = 0$.

Enfin,

$$G(0) = \int_0^\infty \frac{1}{1+t^2}\, dt = \lim_{X\to+\infty} \Big[arctan(t)\Big]_0^X = \lim_{X\to+\infty} arctan(X) = \frac{\pi}{2}$$

5) Une fois encore, on invoque une conséquence du théorème de convergence dominée. On fixe $a > 0$.

L'application $x \in]a, +\infty[\mapsto g_x(t)$ est dérivable pour tout $t \in \mathbb{R}^+$ avec dérivée $\dfrac{-t^2 e^{-xt^2}}{1+t^2}$, qui est majorée en valeur absolue, uniformément en $x \in]a, +\infty[$, par $\dfrac{t^2 e^{-at^2}}{1+t^2}$ donc par e^{-at^2}. Cette dernière fonction étant Lebesgue intégrable sur $\mathbb{R}^+$ (même justification qu'au 1.).

Ainsi, G est dérivable sur $]a, +\infty[$. Comme $a > 0$ est arbitraire, G est dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$. De plus, pour tout $x > 0$, on a

$$G'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{-t^2 e^{-xt^2}}{1+t^2}\, dt$$

On a ainsi pour tout $x > 0$, on a

$$G'(x) - G(x) = -\int_0^{+\infty} e^{-xt^2}\, dt = -\frac{1}{\sqrt{x}} \int_0^{+\infty} e^{-u^2}\, du$$

après changement de variable $u = xt^2$ (admissible car $x > 0$).

6) On peut résoudre l'équation différentielle mais plus simplement:

on pose $\Delta(x) = \dfrac{\pi}{2} - 2I \displaystyle\int_0^{\sqrt{x}} e^{-u^2}\, du$. Cette fonction est dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$ et sa dérivée est $\Delta'(x) = -\frac{I}{\sqrt{x}} e^{-x}$ donc Δ a la même dérivée que $x \mapsto e^{-x} G(x)$ sur $\mathbb{R}^{+*}$ d'après 5.

Ainsi, pour tout $x > 0$, on a $\Delta(x) = e^{-x} G(x) + K$ (où K est une constante réelle). Comme ces fonctions sont continues sur $\mathbb{R}^+$ et coïncident sur $\mathbb{R}^{+*}$, elles sont égales sur $\mathbb{R}^+$ donc en 0. Donc $K = 0$ et on a le résultat.

7) On passe à la limite en $+\infty$ pour obtenir: $0 = \dfrac{\pi}{2} - 2I^2$. Donc $I = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Exercice 3.

1) $\mathcal{B}$ est un ouvert donc un borélien, qui est donc λ_2 mesurable. On remarque que $\mathcal{B}$ est inclus dans $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 |\ (x^2 + y^2)^2 \leq x^2 + y^2\}$ i.e. la boule unité fermée (euclidienne) B_2. Ainsi $\lambda_2(\mathcal{B}) \leq \lambda_2(B_2) = \pi$ (ou, tout simplement, B_2 est compact donc de mesure λ_2 finie).

2) On fait un changement de variable en polaire. L'ouvert $\mathcal{B}$ est l'image de l'ouvert $D = \left\{(r, \theta) \in \mathbb{R}^{+*} \times] -\pi/4, \pi/4[\,\middle|\, r^2 < \cos(2\theta)\right\}$ par le difféomorphisme $\varphi(r, \theta) = (r\cos(\theta), r\sin(\theta))$, dont le jacobien vaut r. On a donc, par le théorème de changement de variable: $\lambda_2(\mathcal{B}) = \displaystyle\int_D r\, d\lambda_2$. Par Fubini-Tonnelli, on obtient

$$\lambda_2(\mathcal{B}) = \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \int_0^{\sqrt{\cos(2\theta)}} r\, dr d\theta = \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \left[\frac{1}{2} r^2\right]_0^{\sqrt{\cos(2\theta)}} d\theta = \frac{1}{2} \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \cos(2\theta)\, d\theta = \frac{1}{2}.$$

Exercice 4.

1) En niant $(*)$, il existe $\varepsilon_0 > 0$ tel que pour tout $\delta > 0$, il existe $(U_\delta) \in T$ avec $\mu(U_\delta) \leq \delta$ et $\nu(U_\delta) \geq \varepsilon_0$. Ainsi, en choisissant $\delta = 2^{-n}$, on a: il existe $\varepsilon_0 > 0$ et une suite (A_n) de T tel que $\mu(A_n) \leq 2^{-n}$ et $\nu(A_n) \geq \varepsilon_0$. Maintenant, avec $B_n = \bigcup_{k>n} A_k \in T$, cette suite est décroissante pour l'inclusion. De plus, $\mu(B_n) \leq \sum_{k>n} 2^{-k} = 2^{-n}$. Enfin, $\nu(B_n) \geq \nu(A_{n+1}) \geq \varepsilon_0$ car $A_{n+1} \subset B_n$.

2) Montrons que $(**) \Rightarrow (*)$. Si $(*)$ est faux. On utilise 1. puis on applique le théorème de continuité monotone des mesures: comme ν est une mesure finie et (B_n) est décroissante, on a

$$\lim \nu(B_n) = \nu(\lim B_n)$$

où $\lim B_n = \bigcap_n B_n \in T$. Donc, avec $B = \lim B_n$, on a $\nu(B) \geq \varepsilon_0$.

Or $\mu(B) \leq \mu(B_n) \leq 2^{-n}$ pour tout n donc $\mu(B) = 0$ et on devrait donc avoir $\nu(B) = 0$, donc $(**)$ est faux.

Enfin, $(*) \Rightarrow (**)$ est évident.