

INTÉGRATION EXAMEN

Cours. (2 points)

Enoncer le théorème de Fubini.

Exercice 1. (5 points=0,5+0,5+(0,5+0,5+0,5)+2,5)

1) Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$ et périodique de période $T > 0$. Montrer que pour tout

$$a \in \mathbb{R}, \text{ on a } \int_0^T f(t) dt = \int_a^{a+T} f(t) dt.$$

Indication: utiliser Chasles puis faire un changement de variable.

Soit $r > 1$.

2) Justifier que $I_r = \int_{-\pi}^{\pi} \ln |1 - re^{it}| dt$ est bien définie.

3)a) Comparer I_r et $\int_{-\pi}^{\pi} \ln |1 + re^{it}| dt$

b) En déduire que $I_r = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \ln |1 - r^2 e^{2it}| dt$.

c) En déduire que $I_r = \frac{1}{2} I_{r^2}$

4) Déterminer $\lim_{m \rightarrow +\infty} \frac{1}{m} I_{r^m}$. En déduire la valeur de I_r .

Exercice 2. (7,5 points=1+0,5+1+1+2,5+1+0,5)

Cet exercice propose une méthode de calcul de l'intégrale $I = \int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt$.

1) Justifier que I est bien définie et coïncide avec $\int_{\mathbb{R}^+} e_2 d\lambda_1$, où $e_2(t) = e^{-t^2}$.

Pour $x \in \mathbb{R}^+$, on considère $g_x(t) = \frac{e^{-xt^2}}{1+t^2}$

2) Montrer que g_x est (Lebesgue) λ_1 -intégrable sur $\mathbb{R}^+$.

On définit alors dans la suite, pour $x \in \mathbb{R}^+$: $G(x) = \int_{\mathbb{R}^+} g_x d\lambda_1$.

3) Démontrer que G est continue sur $\mathbb{R}^+$.

4) Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} G(x) = 0$. Que vaut $G(0)$?

5) Démontrer que G est dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$. Vérifier que G est solution de l'équation différentielle suivante pour $x > 0$:

$$G'(x) - G(x) = -\frac{I}{\sqrt{x}}.$$

6) En déduire que pour tout $x \geq 0$: $e^{-x}G(x) = \frac{\pi}{2} - 2I \int_0^{\sqrt{x}} e^{-u^2} du$.

7) En déduire I .

Exercice 3. (4,5 points=1+3,5)

On considère l'intérieur de la demi-lemniscate de Bernoulli

$$\mathcal{B} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0 \text{ et } (x^2 + y^2)^2 < x^2 - y^2\}.$$

1) Justifier que $\mathcal{B}$ est λ_2 -mesurable et que $\lambda_2(\mathcal{B})$ est fini.

2) Déterminer l'aire de $\mathcal{B}$, i.e. calculer $\lambda_2(\mathcal{B})$. *Indication: effectuer un changement de variable en polaire.*

Exercice 4. (3 points=1,5+1,5)

Soit (X, T) un espace mesurable. On considère deux mesures positives finies sur cet espace: μ et ν . On veut montrer l'équivalence entre

$$(*) \quad \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall A \in T: \mu(A) \leq \delta \implies \nu(A) \leq \varepsilon$$

et

$$(**) \quad \forall A \in T: \mu(A) = 0 \implies \nu(A) = 0$$

1) On suppose que $(*)$ est faux. Montrer qu'il existe $\varepsilon_0 > 0$ et une suite décroissante (B_n) de T tel que $\mu(B_n) \leq 2^{-n}$ et $\nu(B_n) \geq \varepsilon_0$.

Indication: nier $()$ pour obtenir des A_k dont on prendra la réunion pour $k > n$.*

2) Conclure.