INTÉGRATION - Session1
Eléments de correction[1]

Cours-exercice.

B]1) $\hat{f}(0) = 1/4$. Après calcul, on trouve pour tout $n \in \mathbb{Z}$ non nul: $\hat{f}(n) = \dfrac{(-1)^n - 1}{2\pi^2 n^2}$ donc $\hat{f}(n) = 0$ si n est pair et $\hat{f}(n) = \dfrac{-1}{\pi^2(2k+1)^2}$ si $n = 2k+1$, où $k \in \mathbb{Z}$.

2) On applique le théorème de Dirichlet (f est C^1 par morceaux) en $x = 0$, où f est continue. On a $f(0) = 0$ et on obtient $\dfrac{1}{4} - \displaystyle\sum_{-N \le 2k+1 \le N} \dfrac{1}{\pi^2(2k+1)^2} \longrightarrow 0$ donc $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \dfrac{1}{(2k+1)^2} = \dfrac{\pi^2}{8}$. On en déduit (les séries convergent!)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \sum_{\substack{n>0 \\ npair}} \frac{1}{n^2} + \sum_{\substack{n>0 \\ nimpair}} \frac{1}{n^2} = \sum_{k>0} \frac{1}{4k^2} + \frac{\pi^2}{8} \qquad \text{donc} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{3}{4} \cdot \frac{\pi^2}{8} = \frac{\pi^2}{6}$$

Exercice 1.

Avant tout: l'intégrande est une fonction continue sur $[0, \sqrt{n}]$ donc intégrable (au sens de Riemann donc de Lebesgue) sur $[0, \sqrt{n}]$. Posons, pour $x \in \mathbb{R}^+$, $f_n(x) = \mathbb{1}_{[0,\sqrt{n}]}(x).x\cos(x^2).\left(1 - \frac{x^2}{n}\right)^n$. Cette fonction est continue sur $\mathbb{R}^+$. On va appliquer le théorème de convergence dominée.

i) Pour tout $x \in \mathbb{R}^+$ fixé, $f_n(x) = x\cos(x^2).\left(1 - \frac{x^2}{n}\right)^n$ pour n assez grand (dès que $n \ge x^2$ en fait) donc $f_n(x)$ converge vers $x\cos(x^2).\mathrm{e}^{-x^2}$.

ii) Pour tout $x \in \mathbb{R}^+$ et tout $n \ge 1$, on a $\left|x\cos(x^2)\left(1 - \frac{x^2}{n}\right)^n\right| \le h(x)$, avec $h(x) = x\mathrm{e}^{-x^2}$. La fonction h est continue sur $\mathbb{R}^+$, donc localement R.I. et son intégrale généralisée converge (elle se calcule facilement d'ailleurs!). Donc h est Lebesgue intégrable sur $\mathbb{R}^+$.

D'après le théorème de convergence dominée, on a $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \int_0^{\sqrt{n}} x\cos(x^2).\left(1 - \frac{x^2}{n}\right)^n dx = \int_{\mathbb{R}^+} x\cos(x^2)\mathrm{e}^{-x^2}\, d\lambda$, qui vaut $\displaystyle\int_0^{\infty} x\cos(x^2)\mathrm{e}^{-x^2}\, dx$ (par coïncidence des intégrales de Lebesgue et de Riemann généralisée). Enfin, elle vaut la partie réelle de $\displaystyle\int_0^{\infty} x\mathrm{e}^{-(1+i)x^2}\, dx = \frac{1}{2(1+i)}$ donc la limite cherchée est $1/4$.

Exercice 2.

On remarque que l'intérieur de la cardioïde $C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 |\ x^2 + y^2 \le \sqrt{x^2+y^2} + x\}$ a pour équation polaire: $\rho \le 1 + \cos(\theta)$.

1) C est un fermé borné, donc un compact de $\mathbb{R}^2$. En effet, on a $\sqrt{x^2+y^2} = \rho \le 2$ donc cette cardioïde est incluse dans le disque centré en l'origine et de rayon 2. Ainsi C est borné. De plus, C est fermé comme image réciproque du fermé $\mathbb{R}^+$ par l'application continue $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \to \sqrt{x^2+y^2} + x - x^2 + y^2$ (par exemple). Ainsi, C est un borélien et $\lambda_2(C)$ est fini (et même plus petit que 4π).

[1] Pascal Lefèvre

2) On voit que l'aire de C vaut $\lambda_2(C) = \int_C 1\, d\lambda_2 = \int_{\overset{\circ}{C}} 1\, d\lambda_2$. Effectuons le changement de variable en polaire, très naturel ici. L'ouvert $\overset{\circ}{C}$ est l'image de l'ouvert $\Delta = \{(\rho, \theta) \in \mathbb{R}^{+*}\times]0, 2\pi[\mid \rho < 1 + \cos(\theta)\}$ par le difféomorphisme $(\rho, \theta) \to (\rho\cos(\theta), \rho\sin(\theta))$. On a donc $\lambda_2(C) = \int_\Delta \rho\, d\lambda_2$ (cf cours). Par Fubini-Tonnelli, on obtient

$$\lambda_2(C) = \int_{]0,2\pi[} \Big(\int_{]0,1+\cos(\theta)[} \rho\, d\rho \Big) d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2}(1 + \cos(\theta))^2\, d\theta = \frac{3\pi}{2}.$$

Remarque: si on voulait scrupuleusement utiliser à la fois le théorème de changement de variable entre ouverts et ne pas admettre $\lambda_2(C) = \lambda_2(\overset{\circ}{C})$, alors on remarque que C est l'intersection des parties ouvertes ω_r ayant pour équation polaire: $\rho < r(1 + \cos(\theta))$, où $r > 1$. Il suffit donc de prendre la limite quand $r \to 1^+$ de $\lambda_2(\omega_r)$, pour lequel le calcul est le même (avec un terme r^2 en plus). Le résultat final est le même évidemment.

Exercice 3.

1) Il y a convergence presque partout donc il existe un borélien N de mesure nulle tel que $\ell(x) = \lim \mathrm{e}^{2i\pi n_j x}$ pour tout $x \notin N$. On définit (par exemple) $\ell(x) = 0$ pour tout $x \in N$. La fonction $\ell_{|N^c}$ est mesurable comme limite simple de fonction mesurables (car restrictions à N^c de fonctions continues) et $\ell_{|N}$ est mesurable (car nulle). Par le théorème de recollement (N est mesurable !), ℓ est mesurable. De plus, $|\ell(x)| = 1$ pour tout $x \notin N$ donc $|\ell| = 1$ p.p. donc elle est essentiellement bornée: $\ell \in L^\infty([0, 1], \lambda)$ et $\|\ell\|_\infty = 1$.

2) Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, puisque N est négligeable, on a $\hat{\ell}(n) = \int_{[0,1]} \ell(x)\mathrm{e}^{-2i\pi nx}\, d\lambda = \int_{N^c} \lim_{j\to\infty} \mathrm{e}^{2i\pi n_j x}\mathrm{e}^{-2i\pi nx}\, d\lambda$.

D'après le théorème de convergence dominée (on a déjà la convergence presque partout et la domination est évidente: $|\mathrm{e}^{-2i\pi(n-n_j)x}| = 1$ p.p. et pour tout j, et la fonction constante est λ-intégrable sur $[0, 1]$), on a $\hat{\ell}(n) = \lim_{j\to\infty} \int_{[0,1]} \mathrm{e}^{2i\pi(n_j-n)x}\, d\lambda$ or $\int_{[0,1]} \mathrm{e}^{2i\pi(n_j-n)x}\, d\lambda = 0$ dès que j est assez grand (car alors $n_j \neq n$). Donc $\hat{\ell}(n) = 0$.

3) D'après le cours, comme $\ell \in L^\infty([0, 1], \lambda) \subset L^1([0, 1], \lambda)$, la nullité de $\hat{\ell}$ implique que $\ell = 0$ presque partout. Mais alors $\|\ell\|_\infty = 0$. Contradiction !

Exercice 4.

1) On s'inspire de l'argument donné en cours pour justifier que $\mathbb{1}_\mathbb{Q}$ n'est pas Riemann-intégrable. Soit $\varepsilon > 0$, on peut minorer $\int_a^b f(x)\, dx$ à l'aide la la somme de Darboux supérieure, pour une subdivision $\Sigma = \{x_0, \dots, x_{s+1}\}$ adaptée:

$$\int_a^b f(x)\, dx \geq \sum_{k=0}^{s} (x_{k+1} - x_k) \sup_{]x_k,x_{k+1}[} f \qquad - \varepsilon.$$

Par hypothèse de densité, pour tout $0 \leq k \leq s$, on a $\sup_{]x_k,x_{k+1}[} f \geq f(c_k) \geq \alpha$ où $c_k \in]x_k, x_{k+1}[\cap D_\alpha \neq \emptyset$. On obtient $\int_a^b f(x)\, dx \geq \sum_{k=0}^{s} (x_{k+1} - x_k)\alpha - \varepsilon = \alpha(b - a) - \varepsilon$. Comme ε est arbitraire, on a le résultat.

2) $\int_a^b f(x)\, dx \geq 0$ car f est positive. Si elle n'est pas strictement positive, alors $\int_a^b f(x)\, dx = 0$.

3) D'après le cours, f étant Riemann-intégrable, est Lebesgue-intégrable. Elle est positive d'intégrale nulle donc f est nulle presque partout. Ceci contredit l'hypothèse.

4)a) Supposons $I_0, \dots I_m$ construits avec les bonnes propriétés et notons $I_m = [a_m, b_m]$ avec $a_m < b_m$. Comme f est positive, on a $0 = \int_a^b f(x)\, dx \geq \int_{a_m}^{b_m} f(x)\, dx \geq 0$, donc $\int_{a_m}^{b_m} f(x)\, dx = 0$. On ne peut avoir $D_{\frac{1}{m+1}}$ dense dans I_m car cela impliquerait (cf 1.) que $\int_{a_m}^{b_m} f(x)\, dx \geq \frac{1}{m+1}(b_m - a_m) > 0$. Donc $I_m \setminus D_{\frac{1}{m+1}}$ est d'intérieur non vide, d'où le résultat.

b) La suite des I_n est une suite décroissante de compacts non vides (de $[a, b]$) donc d'intersection non vide. Soit $c \in \bigcap_{n\geq 0} I_n$, on a $c \notin D_{\frac{1}{n+1}}$ donc $f(c) \leq \frac{1}{n+1}$ et ce pour tout n donc $f(c) \leq 0$ or $f > 0$ par hypothèse. Contradiction !