Licence de Mathématiques. Université d'Artois.

INTÉGRATION
Contrôle Continu 1 du 28 Février

Il existe $i \in \{1, 2, 3\}$ tel que "**Exercice i**" tombe à l'épreuve de contrôle continu.

Exercice 1.

On fixe deux réels $a < b$. Soient f une fonction décroissante et positive sur $[a, b]$ et g une fonction Riemann-intégrable sur $[a, b]$. On veut montrer l'existence de $c \in [a, b]$ tel que

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = f(a)\int_a^c g(x)\,dx.$$

On introduit $G(y) = \displaystyle\int_a^y g(x)\,dx$, pour $y \in [a, b]$.

1) Justifier que fg est une fonction Riemann-intégrable sur $[a, b]$. *On pourra utiliser le cours.*

2) Traiter le cas $f(a) = f(b)$.

On supposera désormais que $f(a) > f(b)$.

3) Justifier l'existence de $m = \min\limits_{[a,b]} G$ et $M = \max\limits_{[a,b]} G$, et que $M \geq 0$.

4) On suppose dans cette question seulement que f est une fonction en escalier. Montrer que $\displaystyle\int_a^b f(x)g(x)\,dx \leq Mf(a)$. *Indication: faire une transformation d'Abel.*

5) Démontrer que $\displaystyle\int_a^b f(x)g(x)\,dx \leq Mf(a)$. *Indication:* $y \to \displaystyle\int_a^y |g(x)|\,dx$ *est uniformément continue sur* $[a, b]$.

6) En déduire: $mf(a) \leq \displaystyle\int_a^b f(x)g(x)\,dx \leq Mf(a)$ puis conclure.

Exercice 2.

Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, étudier la convergence de l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} \frac{\ln(|1-x|).\cos(\ln x)}{x^\alpha}\,dx.$$

Indications.

Pour l'étude à la borne infinie: si $\alpha \leq 1$, *montrer, avec* $a_k = \exp(2k\pi - \pi/2)$ *et* $b_k = \exp(2k\pi + \pi/2)$ *(où* $k \in \mathbb{N}$*), que* $\displaystyle\int_{a_k}^{b_k} \frac{\ln(|1-x|).\cos(\ln x)}{x^\alpha}\,dx \longrightarrow +\infty$.

Si $\alpha > 1$, *on pourra remarquer que* $x \mapsto \frac{\ln(|1-x|)}{x^{\alpha-1}}$ *est décroissante pour* x *supérieur à un certain* A_α.

Pour l'étude au voisinage de 0, *se souvenir du comportement de* $\ln(1-x)$. *On pourra aussi s'inspirer de ce qui précède.*

Exercice 3.

On va montrer qu'il existe des parties de $\mathbb{R}$ qui ne sont pas des boréliens. On note λ la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$.

Soit $\mathcal{R}$ la relation d'équivalence sur $\mathbb{R}$: $x\mathcal{R}y$ si $x - y \in \mathbb{Q}$. Par l'axiome du choix, il existe une section S, i.e. une partie $S \subset \mathbb{R}$ telle que toute classe d'équivalence a un unique représentant dans S. On va montrer que $S \notin \mathcal{B}(\mathbb{R})$. On suppose donc que $S \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

1) En utilisant, $\mathbb{R} = \bigcup\limits_{q\in\mathbb{Q}} (q + S)$, montrer que $\lambda(S) > 0$.

2) pour $n \in \mathbb{N}$, on note $S_n = S \cap [-n, n]$. Montrer que $\lambda(S_n) = 0$. *Indication: on pourra s'intéresser à la réunion des $q + S_n$ quand q décrit l'ensemble des rationnels de $[-n, n]$.*

3) Conclure.