Université d'Artois
Faculté des Sciences Jean Perrin
Mesure et Intégration (Licence 3 Mathématiques-Informatique)
Daniel Li

Espaces L^p

May 3, 2006

1 Espaces $\mathscr{L}^1$ et L^1.

Soit $(S, \mathscr{T}, m)$ un espace mesuré. On a déjà défini :

$$\boxed{\mathscr{L}^1(S, \mathscr{T}, m) = \mathscr{L}^1(m) = \mathscr{L}^1 = \{f\colon S \to \mathbb{K} = \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C}\,;\ f \ m\text{-intégrable}\}.}$$

On note, pour $f \in \mathscr{L}^1$:

$$\boxed{\|f\|_1 = \int_S |f|\,dm\,.}$$

On dit que c'est la "norme $\mathscr{L}^1$" de f.

Cas particulier. Si $(S, \mathscr{T}, m) = (\mathbb{N}^*, \mathscr{P}(\mathbb{N}^*), c)$, on note :

$$\ell_1 = \{x = (x_n)_{n \geqslant 1}\,;\ \|x\|_1 = \sum_{n=1}^{+\infty} |x_n| < +\infty\}.$$

Proposition 1 *On a, de façon évidente :*
a) $f \in \mathscr{L}^1 \Rightarrow \|f\|_1 < +\infty$ *;*
b) $\|\alpha f\|_1 = |\alpha|\,\|f\|_1$, $\forall f \in \mathscr{L}^1$, $\forall \alpha \in \mathbb{K} = \mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C}$ *;*
c) $\|f + g\|_1 \leqslant \|f\|_1 + \|g\|_1$, $\forall f, g \in \mathscr{L}^1$ *;*
d) $f = 0$ *m-p.p.* $\Rightarrow \|f\|_1 = 0$.

Cette proposition signifie que $\|\ \|_1$ est une semi-norme sur $\mathscr{L}^1$. Ce n'est **pas** une norme puisqu'il peut y avoir des fonctions $f \in \mathscr{L}^1$, non identiquement nulles, telles que $\|f\|_1 = 0$ (par exemple toute fonction indicatrice d'un ensemble non vide de mesure nulle). On a :

Proposition 2

$$\|f\|_1 = 0 \iff f = 0 \ \ m\text{-}p.p.$$

Preuve. On va montrer que :

$$m(\{f \neq 0\}) > 0 \quad \Longrightarrow \quad \int_S |f|\, dm > 0.$$

En effet :

$$\{f \neq 0\} = \bigcup_{n \geqslant 1} \{|f| \geqslant 1/n\}\,;$$

donc

$$0 < m(\{f \neq 0\}) = \lim_{n \to +\infty}\!\uparrow m(\{|f| \geqslant 1/n\})\,,$$

et il existe $n_0 \geqslant 1$ tel que $m(\{|f| \geqslant 1/n_0\}) > 0$. Alors l'inégalité de Markov-Tchebychev :

$$m(\{|f| \geqslant a\}) \leqslant \frac{1}{a} \int_S |f|\, dm$$

entraîne $\int_S |f|\, dm > 0$. □

Soit alors :

$$\mathcal{N}_1 = \{f \in \mathscr{L}^1\,;\ \|f\|_1 = 0\} = \{f \in \mathscr{L}^1\,;\ f = 0\ m\text{-}p.p.\}.$$

C'est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{L}^1$.

Définition 3 *On note* $\boxed{L^1 = L^1(m) = L^1(S, \mathscr{T}, m)}$ *l'espace vectoriel quotient :*

$$L^1(m) = \mathscr{L}^1(m)/\mathcal{N}_1.$$

C'est l'ensemble des classes d'équivalence $\dot{f}$ pour la relation d'équivalence "*égalité m-p.p.*" définie par :

$$f \sim g \quad \Longleftrightarrow \quad f - g \in \mathcal{N}_1.$$

On a $f \sim g$ si et seulement si $f = g$ *m-p.p.*.

Lorsque $f \sim g$, on a $\int_S |f|\, dm = \int_S |g|\, dm$; on peut donc poser :

$$\boxed{\|\dot{f}\|_1 = \textstyle\int_S |f|\, dm}$$

Alors $\|\ \|_1$ est une norme sur $L^1(m)$, appelée la *norme* L^1 ; en effet, on a $\|\dot{f}\|_1 = 0$ si et seulement si $f = 0$ *m-p.p.*, c'est-à-dire $f \in \mathcal{N}_1$, ou encore $\dot{f} = \dot{0}$. De plus les propriétés de smi-norme sont conservées.

Théorème 4 $L^1(m)$ *est un espace vectoriel normé complet, autrement dit un espace de Banach, pour la norme* $\|\ \|_1$.

Rappel. Si E est un espace vectoriel normé, alors E est complet si et seulement si toute série absolument convergente (c'est-à-dire telle que $\sum_n \|x_n\| < +\infty$) d'éléments de E converge dans E.

Preuve du théorème. Supposons $\sum_{n=1}^{+\infty} \|\dot{f}\|_1 < +\infty$. Cela signifie que :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left[\int_S |f_n| \, dm \right] < +\infty.$$

Mais le corollaire du Théorème de convergence monotone dit qu'alors :

$$\int_S \Big(\sum_{n=1}^{+\infty} |f_n| \Big) \, dm = \sum_{n=1}^{+\infty} \left[\int_S |f_n| \, dm \right] < +\infty.$$

Si l'on pose :

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} |f_n(x)| \,, \quad x \in S,$$

cela signifie que la fonction $\varphi \colon S \to \overline{\mathbb{R}}_+$ est m-intégrable.

En particulier, φ est donc finie m-*p.p.* : il existe une partie mesurable N de S telle que $m(N) = 0$ et $\sum_n |f_n(x)| < +\infty$ pour tout $x \in S \setminus N$. En particulier, pour tout $x \in S \setminus N$, la série $\sum_n f_n(x)$ converge dans $\mathbb{K}$. Posons :

$$f(x) = \begin{cases} \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x) & \text{si} \quad x \in S \setminus N\,; \\ 0 & \text{si} \quad x \in N. \end{cases}$$

La fonction f est mesurable et l'on a :

$$\Big\| \sum_{n=1}^{N} \dot{f}_n - \dot{f} \Big\|_1 = \int_S \Big| \sum_{n=1}^{N} f_n - f \Big| \, dm \underset{N \to +\infty}{\longrightarrow} 0\,,$$

par le Théorème de convergence dominée, car :

$$\Big| \sum_{n=1}^{N} f_n \Big| \leqslant \sum_{n=1}^{N} |f_n| \leqslant \varphi$$

et que φ est m-intégrable. □

2 Espaces $\mathscr{L}^p$ et L^p, $1 < p < \infty$.

Soit p un nombre réel > 0. On note :

$$\boxed{\mathscr{L}^p(m) = \{f \colon S \to \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C}\,;\ f \text{ mesurable et } \int_S |f|^p \, dm < +\infty\}}$$

Cela équivaut à dire que f est mesurable et que $|f|^p$ est m-intégrable (ou $|f|^p \in \mathscr{L}^1(m)$).

<u>Cas particulier</u>. Si $(S, \mathscr{T}, m) = (\mathbb{N}^*, \mathscr{P}(\mathbb{N}^*), c)$, on note :

$$\ell_p = \{x = (x_n)_{n\geqslant 1}\,;\ \|x\|_p = \Big(\sum_{n=1}^{+\infty} |x_n|^p\Big)^{1/p} < +\infty\}.$$

Proposition 5 *Pour tout $p > 0$, $\mathscr{L}^p(m)$ est un espace vectoriel (réel ou complexe).*

Preuve. C'est un sous-ensemble de l'espace vectoriel des fonctions mesurables, contenant 0 et clairement stable par multiplication par un scalaire. De plus, si $f, g \in \mathscr{L}^p(m)$, remarquons que :

$$|f(x) + g(x)| \leqslant |f(x)| + |g(x)| \leqslant 2\max(|f(x)|, |g(x)|);$$

donc :

$$|f(x) + g(x)|^p \leqslant 2^p \max(|f(x)|^p, |g(x)|^p) \leqslant 2^p(|f(x)|^p + |g(x)|^p)$$

et :

$$\int_S |f+g|^p\,dm \leqslant 2^p\Big(\int_S |f|^p\,dm + \int_S |g|^p\,dm\Big) < +\infty,$$

ce qui montre que $f + g \in \mathscr{L}^p(m)$. □

Introduisons maintenant, pour $f \in \mathscr{L}^p(m)$:

$$\boxed{\|f\|_p = \Big(\textstyle\int_S |f|^p\,dm\Big)^{1/p}}.$$

Nous allons voir que, pour $p \geqslant 1$, $\|\ \|_p$ est une <u>semi-norme</u> sur $\mathscr{L}^p(m)$ (ce n'est pas vrai pour $0 < p < 1$). Contrairement au cas $p = 1$, cela n'est pas immédiat.

Nous aurons besoin de :

Définition 6 *Pour $1 < p < \infty$, l'<u>exposant conjugué</u> de p est le nombre $q > 1$ vérifiant* $\boxed{\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1}$.

On notera que $p = 2 \Leftrightarrow q = 2$ (et d'ailleurs c'est le seul cas où p et q sont tous les deux entiers), que $q \to +\infty \iff p \to 1$ et $q \to 1 \iff p \to +\infty$.

On a $q = \frac{p}{p-1}$ et $\boxed{(q-1)(p-1) = 1}$.

Théorème 7 (<u>inégalité de Hölder</u>) *Soit $1 < p < \infty$ et $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Alors pour toutes les fonctions mesurables $f, g\colon S \to \overline{\mathbb{R}}_+$ <u>positives</u>, on a :*

$$\boxed{\int_S fg\,dm \leqslant \Big(\int_S f^p\,dm\Big)^{1/p}\Big(\int_S g^q\,dm\Big)^{1/q}}.$$

Pour $p = 2$:

$$\boxed{\int_S fg\,dm \leqslant \Big(\int_S f^2\,dm\Big)^{1/2}\Big(\int_S g^2\,dm\Big)^{1/2}}$$

s'appelle l'**inégalité de Cauchy-Schwarz**.

Corollaire 8 *Pour* $1 < p < \infty$ *et* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$*, on a :*

$$f \in \mathscr{L}^p(m) \ \ et \ \ g \in \mathscr{L}^q(m) \quad \Longrightarrow \quad fg \in \mathscr{L}^1(m)$$

et :

$$\boxed{\|fg\|_1 \leqslant \|f\|_p\,\|g\|_q}\,.$$

Preuve de l'inégalité de Hölder. 1) *Réductions.* • L'inégalité est évidente si $\int_S f^p\,dm = +\infty$ ou si $\int_S g^q\,dm = +\infty$. On peut donc supposer qu'elles sont toutes les deux $< +\infty$ (c'est-à-dire que $f \in \mathscr{L}^p(m)$ et $g \in \mathscr{L}^q(m)$).

• D'autre part, si $\|f\|_p = 0$, alors $\int_S f^p\,dm = 0$, et comme $f \geqslant 0$, on a $f^p = 0$ m-$p.p.$. Alors $fg = 0$ m-$p.p.$ et $\int_S fg\,dm = 0$. L'inégalité est donc vérifiée dans ce cas.

De même, si $\|g\|_q = 0$.

On peut donc supposer $\|f\|_p > 0$ et $\|g\|_q > 0$.

• Il suffit de plus de montrer l'inégalité lorsque $\|f\|_p = \|g\|_q = 1$. En effet, pour f, g arbitraires avec $0 < \|f\|_p < +\infty$ et $0 < \|g\|_q < +\infty$, si l'on pose :

$$f_1 = \frac{1}{\|f\|_p}\,f \quad \text{et} \quad g_1 = \frac{1}{\|g\|_q}\,g\,,$$

on a $\|f_1\|_p = \|g\|_q = 1$ et alors :

$$\begin{aligned}\int_S fg\,dm &= \int_S (\|f\|_p\,f_1)(\|g\|_q\,g_1)\,dm = \|f\|_p\|g\|_q \int_S f_1 g_1\,dm \\ &\leqslant \|f\|_p\|g\|_q\Big(\int_S f_1^p\,dm\Big)^{1/p}\Big(\int_S g_1^q\,dm\Big)^{1/q} = \|f\|_p\|g\|_q\,.\end{aligned}$$

2) *Preuve proprement dite.* On suppose donc $\|f\|_p = \|g\|_q = 1$. On utilisera le lemme suivant.

Lemme 9 *Si* $1 < p, q < +\infty$ *et* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$*, on a, pour tous nombres éels positifs* $a, b \geqslant 0$ *:*

$$ab \leqslant \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}\,\cdot$$

Ce lemme reste vrai, de façon évidente si $a = +\infty$ ou $b = +\infty$. On a donc ainsi :

$$f(x)g(x) \leqslant \frac{f(x)^p}{p} + \frac{g(x)^q}{q}\,, \quad \forall x \in S.$$

Il suffit alors d'intégrer pour obtenir :

$$\int_S fg\,dm \leqslant \int_S \frac{f^p}{p}\,dm + \int_S \frac{g^q}{q}\,dm = \frac{1}{p}\Big(\int_S f^p\,dm\Big) + \frac{1}{q}\Big(\int_S g^q\,dm\Big)$$
$$= \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 = \|f\|_p\,\|g\|_q. \qquad \square$$

Preuve du lemme. C'est évident si $a = 0$ ou $b = 0$. On suppose donc $a, b > 0$.

Une méthode est de fixer $a > 0$ et d'étudier la fonction $u(x) = ax - \frac{a^p}{p} - \frac{x^q}{q}$ pour voir qu'elle est positive pour $x > 0$.

On peut aussi raisonner de la façon suivante.

Par symétrie, on peut supposer $p \leqslant q$, c'est-à-dire $p \leqslant 2$. On pose $\varphi(x) = x^{p-1}$ et $\psi(y) = y^{q-1}$. Comme $(p-1)(q-1) = 1$, ψ est la fonction réciproque de φ. Soit :

$$\Phi(a) = \int_0^a \varphi(t)\,dt = \frac{a^p}{p} \quad \text{et} \quad \Psi(b) = \int_0^b \psi(s)\,ds = \frac{b^q}{q}\,\cdot$$

Ces deux nombres représentent une aire (*faire un dessin* avec t en abscisses et s en ordonnées), qui est plus grande que l'aire du rectangle $[0, a] \times [0, b]$, c'est-à-dire ab. $\square$

Corollaire 10 *Si m est une mesure positive bornée : $\boxed{m(S) < +\infty}$, alors, on a, pour $1 \leqslant p_1 < p_2 < \infty$:*

$$\|f\|_{p_1} \leqslant m(S)^{\frac{1}{p_1}-\frac{1}{p_2}}\,\|f\|_{p_2}\,, \quad \forall f \in \mathscr{L}^{p_2}(m).$$

En particulier, si $\boxed{m(S) < +\infty}$:

$$\boxed{1 \leqslant p_1 < p_2 < \infty \quad \Longrightarrow \quad \mathscr{L}^{p_2}(m) \subseteq \mathscr{L}^{p_1}(m) \subseteq \mathscr{L}^1(m)}\,.$$

Preuve. Soit $p = p_2/p_1$; on a $p > 1$. Alors, avec $\frac{1}{q} = 1 - \frac{1}{p} = 1 - \frac{p_1}{p_2}$, l'inégalité de Hölder donne :

$$\|f\|_{p_1}^{p_1} = \int_S |f|^{p_1}\,dm = \int_S |f|^{p_1}\,\mathbb{1}\,dm$$
$$\leqslant \Big(\int_S |f|^{p_1 p}\,dm\Big)^{1/p}\Big(\int_S \mathbb{1}^q\,dm\Big)^{1/q} = \|f\|_{p_2}^{p_1}\,m(S)^{1-\frac{p_1}{p_2}}. \qquad \square$$

Remarque. C'est spécifique aux mesures bornées. Pour la mesure de comptage sur $\mathbb{N}^*$, par exemple, les inclusions s'inversent :

$$1 \leqslant p_1 < p_2 < \infty \quad \Longrightarrow \quad \ell_1 \subseteq \ell_{p_1} \subseteq \ell_{p_2}$$

(exercice : utiliser le fait que si $x = (x_n)_{n\geqslant 1} \in \ell_{p_1}$ alors x_n tend vers 0 et donc, pour n assez grand $|x_n| \leqslant 1$).

Dans le cas de la mesure de Lebesgue, **aucun** de ces espaces n'est contenu dans tous les autres et aucun des ces espaces ne contient tous les autres :

$$\boxed{\mathscr{L}^{p_1}(\mathbb{R}) \not\subseteq \mathscr{L}^{p_2}(\mathbb{R}), \quad \forall p_1 \neq p_2.}$$

(**à faire comme EXERCICE très instructif** : utiliser des fonctions de la forme $f(x) = x^r(\ln x)^s$ pour $x > 1$ et $f(x) = 0$ pour $x \leqslant 1$ ou $g(x) = x^r\big(\ln(1/x)\big)^s$ pour $0 < x < 1$ et $g(x) = 0$ pour $x \notin]0,1[$, avec des valeurs adhéquates des réels r et s).

L'inégalité de Hölder va nous permettre de montrer que $\| \ \|_p$ est une semi-norme.

Théorème 11 (inégalité de Minkowski.) *Pour $1 \leqslant p < \infty$, on a, pour toutes fonctions mesurables $f, g \colon S \to \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$:*

$$\boxed{\Big(\int_S |f+g|^p\,dm\Big)^{1/p} \leqslant \Big(\int_S |f|^p\,dm\Big)^{1/p} + \Big(\int_S |g|^p\,dm\Big)^{1/p}}\,.$$

Conséquence. Pour $f, g \in \mathscr{L}^p(m)$, cela s'écrit :

$$\boxed{\|f+g\|_p \leqslant \|f\|_p + \|g\|_p}$$

et donc $\| \ \|_p$ est une semi-norme sur $\mathscr{L}^p(m)$ ($\|\alpha f\|_p = |\alpha|\,\|f\|_p$ étant évident).

Preuve de l'inégalité de Minkowski. Pour $p = 1$, c'est évident. Supposons donc $p > 1$.

On peut aussi supposer que $\int_S |f+g|^p\,dm > 0$ et que $\int_S |f|^p\,dm < +\infty$ et $\int_S |g|^p\,dm < +\infty$, car sinon l'inégalité est évidente. On a vu (voir Proposition 5) qu'alors $\int_S |f+g|^p\,dm < +\infty$.

Ecrivons alors (grâce au fait que $p > 1$) :

$$\int_S |f+g|^p\,dm \leqslant \int_S |f|\,|f+g|^{p-1}\,dm + \int_S |g|\,|f+g|^{p-1}\,dm.$$

Utilisons l'inégalité de Hölder (avec $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$) :

$$\begin{aligned}\int_S |f|\,|f+g|^{p-1}\,dm &\leqslant \Big(\int_S |f|^p\,dm\Big)^{1/p}\Big(\int_S |f+g|^{(p-1)q}\,dm\Big)^{1/q}\\ &= \Big(\int_S |f|^p\,dm\Big)^{1/p}\Big(\int_S |f+g|^p\,dm\Big)^{1/q}.\end{aligned}$$

De même :

$$\int_S |g|\,|f+g|^{p-1}\,dm \leqslant \Big(\int_S |g|^p\,dm\Big)^{1/p}\Big(\int_S |f+g|^p\,dm\Big)^{1/q}.$$

On obtient donc :

$$\int_S |f+g|^p\,dm \leqslant \left[\Big(\int_S |f|^p\,dm\Big)^{1/p} + \Big(\int_S |g|^p\,dm\Big)^{1/p}\right] \Big(\int_S |f+g|^p\,dm\Big)^{1/q},$$

d'où le résultat en simplifiant par $\Big(\int_S |f+g|^p\,dm\Big)^{1/q}$. □

Remarque. Pour $f \in \mathscr{L}^p(m)$, on a $\|f\|_p = 0$ si et seulement si $f = 0$ m-presque partout (car $\|f\|_p = 0$ s'écrit aussi $\|\,|f|^p\,\|_1 = 0$; cela équivaut donc à $|f|^p = 0$ *m-p.p.*, c'est-à-dire à $f = 0$ *m-p.p.*).

Notation. Soit :

$$\mathcal{N}_p = \{f \in \mathscr{L}^p(m)\,;\ \|f\|_p = 0\} = \{f \in \mathscr{L}^p(m)\,;\ f = 0\ m - p.p.\}.$$

C'est clairement un sous-espace vectoriel de $\mathscr{L}^p(m)$. On notera qu'en fait il ne dépend pas de p : *$\mathcal{N}_p$ est l'espace de toutes les fonctions mesurables $f\colon S \to \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ qui sont nulles m-presque partout*, puisque toute fonction f nulle *m-p.p.* est automatiquement dans $\mathscr{L}^p(m)$ (et $\|f\|_p = 0$).

L'espace vectoriel quotient est noté :

$$\boxed{L^p(m) = \mathscr{L}^p(m)/\mathcal{N}_p}.$$

Si l'on pose $\|\dot{f}\|_p = \|f\|_p$ pour $f \in \mathscr{L}^p(m)$, alors $L^p(m)$ devient un espace vectoriel <u>normé</u>.

Théorème 12 (Théorème de Riesz-Fisher.) *Pour $1 \leqslant p < \infty$, l'espace vectoriel normé $L^p(m)$ est <u>complet</u>: c'est un espace de Banach.*

Preuve. C'est presque la même que dans le cas $p = 1$.

Soit $f_n \in \mathscr{L}^p(m)$ telles que $\sum_{n=1}^{+\infty} \|f_n\|_p < +\infty$.

Posons :

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} |f_n(x)| \leqslant +\infty,$$

et

$$\varphi_N(x) = \sum_{n=1}^{N} |f_n(x)|\,.$$

Puisque $\|\ \|_p$ est une norme (inégalité de Minkowski), on a :

$$\|\varphi_N\|_p \leqslant \sum_{n=1}^{N} \|f_n\|_p.$$

Appliquons le Lemme de Fatou (puisque $\varphi^p = \lim_{N\to+\infty}\!\uparrow \varphi_N^p$) :

$$\int_S \varphi^p \, dm \leqslant \liminf_{N\to+\infty} \int_S \varphi_N^p \, dm = \liminf_{N\to+\infty} \|\varphi_N\|_p$$
$$\leqslant \liminf_{N\to+\infty} \Big(\sum_{n=1}^{N} \|f_n\|_p\Big)^p = \Big(\sum_{n=1}^{+\infty} \|f_n\|_p\Big)^p < +\infty.$$

Il en résulte que φ^p est m-intégrable et donc, en particulier, que $\varphi(x)^p < +\infty$ pour m-presque tout $x \in S$. Alors $\varphi(x) < +\infty$ pour m-presque tout $x \in S$. Cela signifie que, pour ces x, la série $\sum_n f_n(x)$ est absolument convergente. *A fortiori*, elle converge, et l'on peut donc poser, pour ces x :

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$$

(et $f(x) = 0$ pour les autres). Alors $f\colon S \to \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ est mesurable, et :

$$\int_S \Big| f - \sum_{n=1}^{N} f_n \Big|^p dm = \int_S \Big| \sum_{n=N+1}^{+\infty} f_n \Big| dm \leqslant \int_S \Big(\sum_{n=N+1}^{+\infty} |f_n| \Big)^p dm$$
$$= \int_S (\varphi - \varphi_N)^p \, dm \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \,,$$

par le Théorème de convergence dominée, que l'on peut utiliser car :

$$(\varphi - \varphi_N)^p \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

et :

$$|(\varphi - \varphi_N)^p| = (\varphi - \varphi_N)^p \leqslant \varphi^p \in \mathscr{L}^1(m),$$

en utilisant le fait que $\varphi_N \geqslant 0$.

Cela prouve en particulier que $\int_S \Big|f - \sum_{n=1}^{N} f_n\Big|^p dm < +\infty$, au moins pour N assez grand, et donc que $f - \sum_{n=1}^{N} f_n \in \mathscr{L}^p(m)$, ce qui entraîne que $f \in \mathscr{L}^p(m)$. Ensuite, cela prouve que $\big\|f - \sum_{n=1}^{N} f_n\big\|_p \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, et cela termine la preuve.□

Cas particulier important : $p = 2$.

Pour $f, g \in \mathscr{L}^2(m)$, on pose, dans le cas réel :

$$\boxed{(f \mid g) = \int_S fg \, dm}$$

et, dans le cas complexe :

$$\boxed{(f \mid g) = \int_S f\overline{g} \, dm}\,.$$

On pose de plus $(\dot{f} \mid \dot{g}) = (f \mid g)$.
Cela définit un **<u>produit scalaire sur $L^2(m)$</u>**, et $\|\dot{f}\|_2 = (\dot{f} \mid \dot{f})$. Le Théorème de Riesz-Fisher assure alors que

$$\boxed{\boxed{L^2(m) \textbf{ est un espace de Hilbert.}}}$$

3 Sous-espaces denses dans les espaces $L^p(m)$.

Les espaces $L^p(m)$ sont en général "*assez gros*" ; il est donc utile d'avoir des sous-espaces denses "*assez petits*", sur lesquels on peut travailler plus facilement (démontrer des propriétés que l'on pourra, dans les bons cas, étendre à l'espace $L^p(m)$ tout entier).

Commençons par quelques remarques.

Remarques. 1) Soit $f\colon S \to \mathbb{C}$ une application mesurable ; comme :

$$|\mathrm{Re}\, f|^p \leqslant |f|^p \quad \text{et} \quad |\mathrm{Im}\, f|^p \leqslant |f|^p\,,$$

on a :

$$f \in \mathscr{L}^p(m) \quad \Longrightarrow \quad \mathrm{Re}\, f \text{ et } \mathrm{Im}\, f \in \mathscr{L}^p(m).$$

Inversement, comme $|f| \leqslant |\mathrm{Re}\, f| + |\mathrm{Im}\, f|$, si l'on a $\mathrm{Re}\, f$ et $\mathrm{Im}\, f \in \mathscr{L}^p(m)$, alors l'inégalité de Minkowski donne :

$$\begin{aligned}\left(\int_S |f|^p\, dm\right)^{1/p} &\leqslant \left[\int_S \big(|\mathrm{Re}\, f| + |\mathrm{Im}\, f|\big)^p\, dm\right]^{1/p}\\ &\leqslant \left[\int_S |\mathrm{Re}\, f|^p\, dm\right]^{1/p} + \left[\int_S |\mathrm{Im}\, f|^p\, dm\right]^{1/p} < +\infty\,;\end{aligned}$$

donc $f \in \mathscr{L}^p(m)$.

2) Si $f\colon S \to \mathbb{R}$ est une application mesurable, les relations :

$$0 \leqslant f^+ \leqslant |f| \quad \text{et} \quad 0 \leqslant f^- \leqslant |f|$$

et :

$$|f| = f^+ f^-$$

montrent de même que :

$$f \in \mathscr{L}^p(m) \quad \Longleftrightarrow \quad f^+ \text{ et } f^- \in \mathscr{L}^p(m).$$

3.1 Fonctions étagées.

Soit $A \in \mathscr{T}$ une partie mesurable. On a :

$$\int_S \mathbb{1}_A^p \, dm = \int_S \mathbb{1}_A \, dm = m(A) \,;$$

donc :

$$\boxed{\mathbb{1}_A \in \mathscr{L}^p(m) \quad \iff \quad m(A) < +\infty}$$

et alors $\boxed{\|\mathbb{1}_A\|_p = m(A)^{1/p}}$.

Par conséquent, si

$$\varphi = \sum_{k=1}^{n} a_k \mathbb{1}_{A_k}$$

est étagée, et que $\underline{m(A_k) < +\infty}$ lorsque $a_k \neq 0$, on a $\varphi \in \mathscr{L}^p(m)$.

Inversement, si $\varphi \in \mathscr{L}^p(m)$ et $\varphi = \sum_{k=1}^{n} a_k \mathbb{1}_{A_k}$ est étagée, avec $A_1, \ldots, A_n$ deux-à-deux disjoints, alors :

$$|a_k|^p \mathbb{1}_{A_k} \leqslant |\varphi|^p \quad \Longrightarrow \quad |a_k|^p m(A_k) \leqslant \|\varphi\|_p^p < +\infty \,,$$

et donc $m(A_k) < +\infty$ si $a_k \neq 0$.

On a donc montré :

Proposition 13 *Si $\varphi \colon S \to \mathbb{C}$ est étagée, alors $\varphi \in \mathscr{L}^p(m)$ si et seulement si $m(\{\varphi \neq 0\}) < +\infty$.*

On notera que la condition ne dépend pas de p.

Notation. On notera $\mathscr{E}t_p(m)$ l'ensemble de ces fonctions, qui est clairement un sous-espace vectoriel de $\mathscr{L}^p(m)$, et $Et_p(m) = \mathscr{E}t_p(m)/\mathcal{N}_p$ l'espace vectoriel quotient, qui est donc un sous-espace vectoriel de $L^p(m)$.

Théorème 14 *$Et_p(m)$ est dense dans $L^p(m)$.*

Preuve. Soit $f \in \mathscr{L}^p(m)$.

1) Supposons d'abord f *positive.* D'après le Lemme fondamental d'approximation, il existe une suite *croissante* de fonctions *étagées* $\varphi_n \colon S \to \mathbb{R}_+$ positives telles que $0 \leqslant \varphi_n \leqslant f$ et $(\varphi_n)_{n\geqslant 1} \nearrow f$.

Comme $0 \leqslant \varphi_n \leqslant f$ et comme $f \in \mathscr{L}^p(m)$, on a $\varphi_n \in \mathscr{L}^p(m)$; donc $\varphi_n \in \mathscr{E}t_p(m)$.

De plus, comme $\varphi_n \geqslant 0$, on a :

$$0 \leqslant (f - \varphi_n)^p \leqslant f^p \,.$$

Comme $f \in \mathscr{L}^p(m)$ signifie que f^p est m-intégrable, on peut appliquer le Théorème de convergence dominée, qui dit que :

$$\|f - \varphi_n\|_p^p = \int_S (f - \varphi_n)^p \, dm \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0\,.$$

2) a) Si $f\colon S \to \mathbb{R}$, ce qui précède donne des fonctions étagées $\varphi_n, \psi_n \in \mathscr{E}t_p(m)$ telles que $\|f^+ - \varphi_n\|_p \longrightarrow_{n\to+\infty} 0$ et $\|f^- - \psi_n\|_p \longrightarrow_{n\to+\infty} 0$. Alors $\varphi_n - \psi_n \in \mathscr{E}t_p(m)$ et $\|f - (\varphi_n - \psi_n)\|_p \longrightarrow_{n\to+\infty} 0$, par l'inégalité de Minkowski :

$$\|f - (\varphi_n - \psi_n)\|_p \leqslant \|f^+ - \varphi_n\|_p + \|f^- - \psi_n\|_p.$$

b) Si $f\colon S \to \mathbb{C}$, on décompose f en $(\operatorname{Re} f) + i(\operatorname{Im} f)$. □

3.2 Propriétés de régularité des mesures.

Lorsque l'espace mesurable $(S, \mathscr{T})$ est un espace topologique, muni de sa tribu borélienne $\mathscr{T} = \mathscr{B}or(S)$, il est intéressant d'avoir des mesures m qui tiennent compte des propriétés topologiques de S.

Dans certains cas, c'est automatique.

Théorème 15 *Soit X un espace <u>métrique</u> et m une mesure positive <u>bornée</u> sur $\big(X, \mathscr{B}or(X)\big)$. Alors, pour tout borélien B de X, on a :*

$$m(B) = \inf\{m(\Omega)\,;\ \Omega \textit{ ouvert et } B \subseteq \Omega\}$$

et

$$m(B) = \sup\{m(F)\,;\ F \textit{ fermé et } F \subseteq B\}.$$

Preuve. Soit :

$$\mathscr{T}_a = \{B \in \mathscr{B}or(X)\,;\ (\forall \varepsilon > 0)\ (\exists \Omega_\varepsilon \text{ ouvert})\ (\exists F_\varepsilon \text{ fermé}) \text{ tels que } F_\varepsilon \subseteq B \subseteq \Omega_\varepsilon \text{ et } m(\Omega_\varepsilon \setminus F_\varepsilon) \leqslant \varepsilon\}.$$

Nous allons montrer que $\mathscr{T}_a$ est une tribu qui contient les ouverts ; il en résultera que $\mathscr{T}_a$ est la tribu borélienne, ce qui montrera le théorème.

1) $\mathscr{T}_a$ *contient tous les ouverts.* En effet, si Ω est un ouvert, alors Ω^c est un fermé, et l'on a donc :

$$d(x, \Omega^c) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x \in \Omega^c\,;$$

donc :

$$\Omega^c = \bigcap_{n\geqslant 1} \{x \in X\,;\ d(x, \Omega^c) < 1/n\}\,;$$

soit :

$$\Omega = \bigcup_{n\geqslant 1} \{x \in X\,;\ d(x, \Omega^c) \geqslant 1/n\}.$$

Si l'on note :

$$F_n = \{x \in X\,;\ d(x, \Omega^c) \geqslant 1/n\},$$

alors F_n est un fermé (car l'application $x \in X \mapsto d(x, \Omega^c)$ est continue), et $\Omega = \lim\!\uparrow_{n\geqslant 1} F_n$; donc $m(\Omega) = \lim\!\uparrow_{n\geqslant 1} m(F_n)$. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe donc un indice $n = n_\varepsilon \geqslant 1$ tel que :

$$m(\Omega \setminus F_n) = m(\Omega) - m(F_n) \leqslant \varepsilon$$

(la première égalité utilise le fait que m est bornée).

Il en résulte que $\Omega \in \mathscr{T}_a$.

2) *$\mathscr{T}_a$ est une tribu.*

a) On a bien sûr $\emptyset \in \mathscr{T}_a$ et $X \in \mathscr{T}_a$ (car ils sont ouverts : cela résulte donc de ce qui précède ; en fait, comme ils sont ouverts et fermés, c'est évident).

b) Soit $B \in \mathscr{T}_a$. On a :

$$F_\varepsilon \subseteq B \subseteq \Omega_\varepsilon \quad \Longrightarrow \quad \Omega_\varepsilon^c \subseteq B^c \subseteq F_\varepsilon^c\,,$$

et Ω_ε^c est fermé et F_ε^c est ouvert ; de plus :

$$F_\varepsilon^c \setminus \Omega_\varepsilon^c = F_\varepsilon^c \cap (\Omega_\varepsilon^c)^c = F_\varepsilon^c \cap \Omega_\varepsilon = \Omega_\varepsilon \setminus F_\varepsilon\,;$$

donc $m(F_\varepsilon^c \setminus \Omega_\varepsilon^c) = m(\Omega_\varepsilon \setminus F_\varepsilon) \leqslant \varepsilon$. Par conséquent, $B^c \in \mathscr{T}_a$.

c) Soit maintenant une famille dénombrable de parties $B_n \in \mathscr{T}_a$, pour $n \geqslant 1$.

Pour chaque $n \geqslant 1$, il existe un fermé F_n et un ouvert Ω_n tels que :

$$F_n \subseteq B_n \subseteq \Omega_n \quad \text{et} \quad m(\Omega_n \setminus F_n) \leqslant \frac{\varepsilon}{2^{n+2}}\,\cdot$$

A fortiori, on a, puisque $\Omega_n \setminus B_n \subseteq \Omega_n \setminus F_n$:

$$m(\Omega_n \setminus B_n) \leqslant \frac{\varepsilon}{2^{n+2}}\,\cdot$$

Soit :

$$\Omega = \bigcup_{n\geqslant 1} \Omega_n.$$

C'est un ouvert, et il contient $B = \bigcup_{n\geqslant 1} B_n$.

On a :

$$\begin{aligned}
\Omega \setminus B &= \Big(\bigcup_{n\geqslant 1} \Omega_n\Big) \cap \Big(\bigcup_{k\geqslant 1} B_k\Big)^c = \Big(\bigcup_{n\geqslant 1} \Omega_n\Big) \cap \Big(\bigcap_{k\geqslant 1} B_k^c\Big) \\
&= \bigcup_{n\geqslant 1} \Big[\Omega_n \cap \Big(\bigcap_{k\geqslant 1} B_k^c\Big)\Big] \subseteq \bigcup_{n\geqslant 1} (\Omega_n \cap B_n^c) = \bigcup_{n\geqslant 1} (\Omega_n \setminus B_n)\,;
\end{aligned}$$

donc :

$$m(\Omega \setminus B) \leqslant \sum_{n=1}^{+\infty} m(\Omega_n \setminus B_n) \leqslant \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\varepsilon}{2^{n+2}} = \frac{\varepsilon}{4}\,\cdot$$

De même, si $A = \bigcup_{n\geqslant 1} F_n$, on a $A \subseteq B$ et :

$$m(B \setminus A) \leqslant \frac{\varepsilon}{4} \cdot$$

Toutefois, A n'est pas fermé, en général. Néanmoins, si l'on pose :

$$F'_1 = F_1\,,\ F'_2 = F_1 \cup F_2\,,\ \ldots\,,\ F'_n = F_1 \cup F_2 \cup \cdots \cup F_n\,, \ldots$$

les F'_n sont des fermés, et, comme la suite $(F'_n)_{n\geqslant 1}$ est *croissante*, on a :

$$m(A) = m\Big(\bigcup_{n\geqslant 1} F'_n\Big) = \lim_{n\to+\infty}\!\!\uparrow m(F'_n)\,;$$

il existe donc un $n_\varepsilon \geqslant 1$ tel que le fermé $F = F'_{n_\varepsilon}$ vérifie :

$$(A \setminus F) = m(A) - m(F) \leqslant \frac{\varepsilon}{2} \cdot$$

Mais $F \subseteq A \subseteq B$ et :

$$\begin{aligned} m(B \setminus F) &= m\big((B \setminus A) \cup (A \setminus F)\big) = m(B \setminus A) + m(A \setminus F) \\ &\leqslant \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{2} = \frac{3\varepsilon}{4} \cdot \end{aligned}$$

On a bien ainsi trouvé un fermé F et un ouvert Ω tels que $F \subseteq B \subseteq \Omega$ et :

$$m(\Omega \setminus F) = m\big((\Omega \setminus B) \cup (B \setminus F)\big) \leqslant \frac{\varepsilon}{4} + \frac{3\varepsilon}{4} = \varepsilon\,.$$

On a bien prouvé que $\mathscr{T}_a$ est une tribu. □

Définition 16 *Soit X un espace topologique et m une mesure positive sur X muni de sa tribu borélienne $\mathscr{B}or(X)$. On dit que m est une <u>mesure de Borel</u> si $m(K) < +\infty$ pour tout <u>compact</u> K de X.*

On dit que m est une <u>mesure de Radon</u> si c'est une mesure de Borel et si m est <u>régulière</u>, c'est-à-dire que :

- *pour tout borélien $B \subseteq X$, on a :*

$$m(B) = \inf\{m(\Omega)\,;\ \Omega \ \underline{\text{ouvert}} \text{ et } B \subseteq \Omega\}$$

(<u>régularité extérieure</u>)

- *pour tout borélien $B \subseteq X$, on a :*

$$m(B) = \sup\{m(K)\,;\ K \ \underline{\text{compact}} \text{ et } K \subseteq B\}$$

(<u>régularité intérieure</u>).

Il résulte du théorème précédent que l'on a :

Théorème 17 *Si X est un espace métrique compact, alors toute mesure positive bornée sur X muni de sa tribu borélienne est régulière (et donc est une mesure de Radon).*

Un cas, particulièrement important, où il n'y a pas compacité est celui de la mesure de Lebesgue.

Théorème 18 *Si V est un ouvert de $\mathbb{R}^N$, toute mesure de Borel sur V est régulière.*

Le théorème est énoncé pour un ouvert, car c'est le cas qui sera le plus ouvent pour la suite ; mais la même preuve montre que c'est aussi vrai sur tout fermé de $\mathbb{R}^N$ (mais pas sur n'importe quelle partie mesurable). Plus généralement, la preuve montre que :

Si X est un espace métrique localement compact dénombrable à l'infini (c'est-à-dire réunion d'une famille dénombrable de parties compactes), alors toute mesure de Borel sur X muni de sa tribu borélienne est régulière (mesure de Radon).

Corollaire 19 *La mesure de Lebesgue est régulière sur tout ouvert V de $\mathbb{R}^N$.*

Preuve. Il suffit de vérifier que c'est une mesure de Borel. Mais si K est un compact de V, c'est *a fortiori* un compact de $\mathbb{R}^N$; il est donc contenu dans un pavé fermé $\prod_{n=1}^N [a_n, b_n]$, et donc :

$$\lambda_N(K) \leqslant \lambda_N\Big(\prod_{n=1}^N [a_n, b_n]\Big) = \prod_{n=1}^N (b_n - a_n) < +\infty \qquad \square$$

Corollaire 20 *Une partie $N \subseteq \mathbb{R}$ est négligeable, pour la mesure de Lebesgue, si et seulement si : pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une suite d'intervalles I_n, $n \geqslant 1$, telle que :*

$$N \subseteq \bigcup_{n\geqslant 1} I_n \quad \textit{et} \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda(I_n) \leqslant \varepsilon.$$

Preuve. 1) Si N a cette propriété, pour chaque $k \geqslant 1$, on peut, en prenant $\varepsilon = 1 : 2^k$, trouver des intervalles $I_{k,n}$, $n \geqslant 1$, tels que $N \subseteq \bigcup_{n\geqslant 1} I_{k,n}$ et $\sum_{n=1}^{+\infty} \lambda(I_{k,n}) \leqslant 1/2^k$. Posons :

$$B = \bigcap_{k\geqslant 1} \bigcup_{n\geqslant 1} I_{k,n}.$$

Alors B est un boélien et $N \subseteq B$. De plus, pour tout $k \geqslant 1$:

$$\lambda(B) \leqslant \lambda\Big(\bigcup_{n\geqslant 1} I_{k,n}\Big) \leqslant \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda(I_{k,n}) \leqslant 1/2^k\,;$$

donc $\lambda(B) = 0$.

2) Inversement, s'il existe un bo'élien B tel que $\lambda(B) = 0$ et $N \subseteq B$, alors, grâce à la régularité, il existe, pour tout $\varepsilon > 0$, un ouvert Ω tel que $N \subseteq B \subseteq \Omega$ et $\lambda(\Omega) \leqslant \varepsilon$. Mais tout ouvert Ω de $\mathbb{R}$ est la réunion d'une suite d'intervalles ouverts I_n deux-à-deux disjoints.

Donc $N \subseteq B \subseteq \Omega = \bigcup_{n\geqslant 1} I_n$ et $\sum_{n=1}^{+\infty} \lambda(I_n) = \lambda(\Omega) \leqslant \varepsilon$. □

Preuve du Théorème 18. Pour tout ouvert V de $\mathbb{R}^N$ (ou plus généralement, pour tout espace métrique localement compact dénombrable à l'infini V), il existe une *suite croissante de compacts* X_k telle que :

$$\mathring{X}_1 \subseteq X_1 \subseteq \mathring{X}_2 \subseteq X_2 \subseteq \cdots \subseteq X_{k-1} \subseteq \mathring{X}_k \subseteq \cdots$$

et

$$V = \bigcup_{k\geqslant 1} X_k = \bigcup_{k\geqslant 1} \mathring{X}_k$$

(une telle suite est appelée *suite exhaustive de compacts*).

Soit B un borélien de V.

On a $B = \bigcup_{k\geqslant 1}(B \cap X_k)$.

1) *Régularité intérieure.* On a :

$$m(B) = \lim_{k\to+\infty}\!\uparrow m(B \cap X_k)\,;$$

donc, pour tout $a < m(B)$, il existe un $k \geqslant 1$ tel que $a < m(B \cap X_k)$. Mais X_k est un espace métrique compact et m est bornée sur X_k (car c'est une mesure de Borel sur V) ; elle est donc régulière sur X_k : il existe un compact $K \subseteq B \cap X_k$ (et *a fortiori* $K \subseteq B$) tel que $a < m(K)$. Cela prouve la régularité intérieure.

2) *Régularité extérieure.* Si $m(B) = +\infty$, il n'y a rien à montrer. Supposons donc $m(B) < +\infty$. Pour chaque $k \geqslant 1$, l'ensemble $B_k = B \cap \mathring{X}_k$ est un borélien de l'espace métrique $\mathring{X}_k$, sur lequel m est bornée (car $m(\mathring{X}_k) \leqslant m(X_k) < +\infty$) ; il existe donc un ouvert Ω_k (de l'espace $\mathring{X}_k$ *a priori* ; mais comme $\mathring{X}_k$ est ouvert dans V, c'est un ouvert de V) tel que$B_k \subseteq \Omega_k$ et :

$$m(\Omega_k \setminus B_k) \leqslant \frac{\varepsilon}{2^k}\,\cdot$$

Alors $\Omega = \bigcup_{k\geqslant 1} \Omega_k$ est un ouvert de V et, comme :

$$\Omega \setminus B = \Big(\bigcup_{k\geqslant 1} \Omega_k\Big) \cap \Big(\bigcap_{l\geqslant 1} B_l^c\Big) \subseteq \bigcup_{k\geqslant 1} (\Omega_k \cap B_k^c) = \bigcup_{k\geqslant 1} (\Omega_k \setminus B_k)\,,$$

on obtient :

$$m(\Omega \setminus B) \leqslant \sum_{k=1}^{+\infty} m(\Omega_k \setminus B_k) \leqslant \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\varepsilon}{2^k} = \varepsilon. \qquad \square$$

3.3 Fonctions continues à support compact.

Nous avons vu plus tôt que l'espace $Et_p(m)$ des fonctions étagées intégrables est un sous-espace vectoriel dense de $L^p(m)$, pour $1 \leqslant p < \infty$. Lorsque l'on est sur un espace topologique, il est bien plus intéressant de pouvoir travailler avec des fonctions continues. Le résultat suivant est donc particulièrement important.

Théorème 21 *Si V est un ouvert de $\mathbb{R}^N$, l'espace $\mathscr{K}(V)$ des fonctions $f\colon V \to \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ continues à support compact est dense dans $L^p(V)$ pour $1 \leqslant p < \infty$.*

Remarque importante. Si Ω est un ouvert non vide de $\mathbb{R}^N$, alors :

$$\boxed{\lambda_N(\Omega) > 0}\,;$$

en effet, Ω contient un pavé ouvert non vide $\prod_{n=1}^N]a_n, b_n[$; de sorte que $\lambda_N(\Omega) \geqslant (b_1 - a_1) \cdots (b_N - a_N) > 0$.

Il en résulte que : *si $f, g\colon V \to \mathbb{K}$ sont deux fonctions continues égales λ_N-presque partout, alors $f = g$ partout.*

En effet, si f n'est pas partout égale à g, il existe, grâce à la continuité de f et g, un ouvert non vide Ω tel que $f(x) \neq g(x)$, $\forall x \in \Omega$; f ne peut donc être λ_N-*p.p.* égale à g, puisque $\lambda_N(\Omega) > 0$.

Il en résulte que si $f \in \mathscr{L}^p(V)$, et si f est continue, alors f est le seul représentant continu de $\dot{f}$.

Rappel. Le *support* $\operatorname{supp} f$ d'une fonction $f\colon V \to \mathbb{K}$ est l'adhérence (dans V) de l'ensemble des points où elle ne s'annule pas :

$$\operatorname{supp} f = \overline{\{x \in V\,;\ f(x) \neq 0\}}\,.$$

C'est donc un fermé (de façon équivalente, le complémentaire du support est le plus grand *ouvert* sur lequel f s'annule).

Si ce support $K = \operatorname{supp} f$ est compact, on a :

$$\int_V |f|^p \, d\lambda_N = \int_K |f|^p \, d\lambda_N \leqslant \sup_{x \in K} |f(x)| \times \lambda_N(K) < +\infty\,;$$

il en résulte que $\boxed{\mathscr{K}(V) \subseteq \mathscr{L}^p(V)}$.

Preuve du Théorème 21. Comme $\mathscr{E}t_p(V)$ est dense dans $\mathscr{L}^p(V)$, il suffit d'approcher chaque $\varphi \in \mathscr{E}t_p(V)$ par une $f \in \mathscr{K}(V)$ (<u>mais</u> il faut prendre garde que $\mathscr{E}t_p(V) \cap \mathscr{K}(V) = \{0\}$), et pour cela, il suffit d'approcher chaque fonction indicatrice $\mathbb{1}_A$ telle que $\lambda_N(A) < +\infty$.

Ecrivons, comme dans la preuve du Théoreme 18 :

$$V = \bigcup_{k \geqslant 1} \overset{\circ}{X}_k\,,$$

où $(X_k)_{k \geqslant 1}$ est une suite exhaustive de compacts $X_k \subseteq V$.

On a :

$$\lambda_N(A) = \lim_{k \to \infty}\!\uparrow \lambda_N(A \cap \overset{\circ}{X}_k)\,;$$

si $A_k = A \cap \overset{\circ}{X}_k$), il existe donc, pour tout $\varepsilon > 0$ un $k \geqslant 1$ tel que

$$\lambda_N(A \setminus A_k) \leqslant (\varepsilon/2)^p.$$

La <u>régularité</u> de la mesure permet de trouver un ouvert Ω et un compact K de $\overset{\circ}{X}_k$ tels que $K \subseteq A_k \subseteq \Omega$ et :

$$\lambda_N(\Omega \setminus K) \leqslant (\varepsilon/4)^p.$$

On notera que, comme $\overset{\circ}{X}_k$ est ouvert dans V, Ω est aussi ouvert dans V. Il existe alors (lemme d'Urysohn), une fonction $\psi\colon \mathbb{R}\mathbb{N} \to R$ continue telle que :

$$\begin{cases} 0 \leqslant \psi(x) \leqslant 1\,; \\ \psi(x) = 1 \text{ si } x \in K\,; \\ \psi(x) = 0 \text{ si } x \notin \Omega\,; \end{cases}$$

par exemple $\psi(x) = \dfrac{\mathrm{dist}\,(x, \Omega^c}{\mathrm{dist}\,(x, \Omega^c + \mathrm{dist}\,(x, K)}$ convient.

Alors :

$$\mathrm{supp}\,\psi \subseteq \overline{\Omega} \subseteq \overline{\overset{\circ}{X}_k} \subseteq X_k$$

est donc compact. De plus :

$$\|\mathbb{1}_{A_k} - \psi\|_p^p = \int_V |\mathbb{1}_{A_k} - \psi|^p \, d\lambda_N \leqslant 2^p \, \lambda_N(\Omega \setminus K) \leqslant (\varepsilon/2)^p,$$

d'où :

$$\begin{aligned} \|\mathbb{1}_A - \psi\|_p &\leqslant \|\mathbb{1}_A - \mathbb{1}_{A_k}\|_p + \|\mathbb{1}_{A_k} - \psi\|_p = \lambda_N(A \setminus A_k)^{1/p} + \|\mathbb{1}_{A_k} - \psi\|_p \\ &\leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon\,, \end{aligned}$$

ce qui achève la démonstration. $\square$