

Exercice 1

1) Pour tout $r < 1$:

$$[M_p(f, r)]^p = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^p d\theta \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(re^{i\theta}) d\theta = u(0),$$

par la propriété de moyenne pour la fonction harmonique u . Donc

$$\sup_{r < 1} M_p(f, r) \leq [u(0)]^{1/p} < +\infty,$$

de sorte que $f \in H^p$ et $\|f\|_p \leq [u(0)]^{1/p}$.

2) a) On sait que $f = P[f^*]$. Donc $|f| \leq P[|f^*|]$.

Si $p = 1$, c'est terminé. Pour $1 < p < \infty$, considérons la mesure $\frac{1}{2\pi} P_r(\theta - t) dt$, qui est une mesure de probabilité sur $[0, 2\pi]$. L'inégalité de Hölder pour cette mesure donne :

$$\begin{aligned} P[|f^*|] &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P_r(\theta - t) |f^*(e^{it})| dt \\ &\leq \left[\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P_r(\theta - t) |f^*(e^{it})|^p dt \right]^{1/p} = \left(P[|f^*|^p](re^{i\theta}) \right)^{1/p}; \end{aligned}$$

on a donc bien $|f|^p \leq P[|f^*|^p]$.

b) Soit v une fonction harmonique majorant $|f|^p$. Alors, pour tout $R < 1$:

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P_r(\theta - t) |f(Re^{it})|^p dt \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P_r(\theta - t) v(Re^{it}) dt = v(Re^{i\theta}),$$

par la propriété de moyenne pour la fonction harmonique v . Le lemme de Fatou donne, en faisant tendre R vers 1 :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P_r(\theta - t) |f^*(e^{it})| dt &\leq \liminf_{R \rightarrow 1} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P_r(\theta - t) |f(Re^{it})|^p dt \\ &\leq \liminf_{R \rightarrow 1} v(Re^{i\theta}) = v(re^{i\theta}), \end{aligned}$$

c'est-à-dire $P[|f^*|^p] \leq v$.

3) a) C'est évident : il suffit de remarquer que $u \circ \varphi$ est harmonique, puisque φ est holomorphe (si $u = \operatorname{Re} U$, avec U holomorphe, alors $u \circ \varphi = \operatorname{Re}(U \circ \varphi)$).

b) On a, grâce à a) :

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |g(re^{it})|^p dt \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u[\varphi(re^{it})] dt = u[\varphi(0)],$$

par la propriété de moyenne de la fonction harmonique $u \circ \varphi$.

Si l'on note $\varphi(0) = R_0 e^{i\theta_0}$, on a :

$$\begin{aligned} u[\varphi(0)] &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P_{R_0}(\theta_0 - t) |f^*(e^{it})|^p dt \\ &\leq \frac{1+R_0}{1-R_0} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f^*(e^{it})|^p dt \\ &= \frac{1+|\varphi(0)|}{1-|\varphi(0)|} \|f^*\|_{L^p(\mathbb{T})}^p = \frac{1+|\varphi(0)|}{1-|\varphi(0)|} \|f\|_{H^p}^p; \end{aligned}$$

donc :

$$\sup_{r<1} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |g(re^{it})|^p dt \leq \frac{1+|\varphi(0)|}{1-|\varphi(0)|} \|f\|_{H^p}^p,$$

ce qui donne le résultat.

Exercice 2

1) On peut d'abord supposer que ψ ne s'annule pas car si ψ a un zéro d'ordre n en a , il est nécessaire que a soit un zéro d'ordre $\geq n$ pour φ , et l'on peut donc simplifier par $(z-a)^n$.

On peut ensuite supposer $|\varphi(z)| \leq 1$ et $|\psi(z)| \leq 1$, en divisant φ par $\|\varphi\|_\infty$ et ψ par $\|\psi\|_\infty$.

On a alors $|f(z)| \leq 1/|\psi(z)|$, d'où $\log |f(z)| \leq -\log |\psi(z)|$. Comme on a $|\psi(z)| \leq 1$, on a $-\log |\psi(z)| \geq 0$, et on a donc en fait :

$$\log^+ |f(z)| \leq -\log |\psi(z)|;$$

d'où :

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log^+ |f(re^{i\theta})| d\theta \leq -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |\psi(re^{i\theta})| d\theta.$$

Comme ψ ne s'annule pas, $\log |\psi|$ est harmonique et donc :

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |\psi(re^{i\theta})| d\theta = \log |\psi(0)|.$$

Il en résulte que $f \in \mathcal{N}$ et que :

$$\|f\|_0 \leq \exp [-\log |\psi(0)|].$$

2) a) On a vu en cours qu'alors $g \in \mathcal{N}$ et

$$\sup_{r<1} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log^+ |g(re^{i\theta})| d\theta = \log \|g\|_0 = \log \|f\|_0 < +\infty.$$

D'autre part, comme g ne s'annule pas, $\log |g|$ est harmonique et donc, pour tout $r < 1$:

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |g(re^{i\theta})| d\theta = \log |g(0)|.$$

Il en résulte que :

$$\begin{aligned} \sup_{r < 1} \|\log |g_r|\|_1 &= \sup_{r < 1} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |\log |g(re^{i\theta})|| d\theta \\ &= \sup_{r < 1} \left[\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} 2 \log^+ |g(re^{i\theta})| d\theta - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |g(re^{i\theta})| d\theta \right] \\ &= 2 \log \|f\|_0 - \log |g(0)| < +\infty. \end{aligned}$$

Par le Théorème d'Herglotz, il existe donc une mesure μ sur $\mathbb{T}$ telle que :

$$\log |g(re^{i\theta})| = P[\mu](re^{i\theta}) = \int_0^{2\pi} P_r(\theta - t) d\mu(e^{it}).$$

Comme $P_r(\theta - t)$ et $\log |g(re^{i\theta})|$ sont réels, on obtient $\int_0^{2\pi} P_r(\theta - t) d\operatorname{Im} \mu(e^{it}) = 0$, et donc, en remplaçant μ par $\operatorname{Re} \mu$, on peut supposer que la mesure μ est réelle.

b) Il est clair que φ et ψ ainsi définies sont analytiques dans $\mathbb{D}$. De plus, puisque $|B(z)| \leq 1$:

$$\begin{aligned} |\varphi(z)| &\leq |c| \exp \left[-\operatorname{Re} \int_0^{2\pi} \frac{e^{it} + z}{e^{it} - z} d\mu^-(e^{it}) \right] \\ &= |c| \exp \left[-\int_0^{2\pi} \operatorname{Re} \left[\frac{e^{it} + z}{e^{it} - z} \right] d\mu^-(e^{it}) \right] \leq |c|, \end{aligned}$$

puisque $\operatorname{Re} \left[\frac{e^{it} + z}{e^{it} - z} \right] = \left[\frac{e^{it} + re^{i\theta}}{e^{it} - re^{i\theta}} \right] = P_r(\theta - t) \geq 0$ et que μ^- est positive. Ainsi $\varphi \in H^\infty$ et $\|\varphi\|_\infty \leq |c|$.

De même $\psi \in H^\infty$ et $\|\psi\|_\infty \leq 1$.

Notons maintenant que :

$$\frac{\varphi(z)}{\psi(z)} = cB(z) \exp \left[\int_0^{2\pi} \frac{e^{it} + z}{e^{it} - z} d\mu(e^{it}) \right].$$

Or, d'après le a), puisque μ est réelle, on a :

$$\log |g(re^{i\theta})| = \int_0^{2\pi} P_r(\theta - t) d\mu(e^{it}) = \operatorname{Re} \left[\int_0^{2\pi} \frac{e^{it} + re^{i\theta}}{e^{it} - re^{i\theta}} d\mu(e^{it}) \right],$$

de sorte que, si l'on pose :

$$H(z) = \int_0^{2\pi} \frac{e^{it} + z}{e^{it} - z} d\mu(e^{it}),$$

on a, pour tout $z = re^{i\theta} \in \mathbb{D}$:

$$\log |g(z)| = \operatorname{Re} H(z).$$

Maintenant, comme g ne s'annule pas dans $\mathbb{D}$, il existe une fonction holomorphe G dans $\mathbb{D}$ telle que $g = \exp G$. On a $|g| = \exp(\operatorname{Re} G)$ et donc $\operatorname{Re} G = \operatorname{Re} H$; il existe donc une constante réelle C telle que $G = H + iC$. Ainsi :

$$f(z) = B(z)g(z) = B(z)\exp[G(z)] = e^{iC}B(z)\exp[H(z)] = e^{iC}B(z)\frac{\varphi(z)}{cB(z)\psi(z)},$$

de sorte qu'en prenant $c = e^{iC}$, on obtient $f = \varphi/\psi$.

c) Comme les fonctions de H^∞ possèdent presque partout des limites non tangentielles, *qui sont non nulles presque partout*, on en déduit que f possède presque partout des limites non tangentielles (et qui sont non nulles presque partout).

Exercice 3

1. On applique le théorème de Pietsch et on obtient une mesure de probabilité μ sur la boule unité de X^* avec la propriété :

$$\forall x \in X, \quad \|T(x)\| \leq \pi_p(T) \left(\int_{B_{X^*}} |\alpha(x)|^p d\mu(\alpha) \right)^{1/p}.$$

Comme dans le cours, ceci s'interprète de la façon suivante : en notant X_p le sous-espace vectoriel de $L^p(B_{X^*}, \mu)$, engendré par toutes les fonctions $f_x(\alpha) = \alpha(x)$ (où $\alpha \in B_{X^*}$) pour x variant dans X , l'application, que l'on notera $\tilde{T} : f_x \mapsto T(x)$ est bien définie et bornée de X_p dans Y . Donc pour tout ξ dans la boule unité de Y^* , $\xi \circ \tilde{T}$ est une forme linéaire continue sur le sous-espace vectoriel X_p de $L^p(B_{X^*}, \mu)$, de norme inférieure à $\pi_p(T)$. Par Hahn-Banach puis par le théorème de représentation du dual de $L^p(B_{X^*}, \mu)$, il existe $h_\xi \in L^q(B_{X^*}, \mu)$ tel que $\|h_\xi\|_q \leq \pi_p(T)$ et

$$\forall x \in X, \quad \xi \left(T(x) \right) = \xi \circ \tilde{T}(f_x) = \int_{B_{X^*}} h_\xi(\alpha) f_x(\alpha) d\mu(\alpha) = \int_{B_{X^*}} h_\xi(\alpha) \alpha(x) d\mu(\alpha).$$

2. Si $a_k \neq 0$, c'est trivial. Si $a_k = 0$ alors, par le 1., $T(x_k) = 0$. En effet, soit on le voit comme une conséquence directe de Pietsch (début du corrigé de 1.), soit on le retrouve comme conséquence de la question 1. : comme $a_k = 0$, $\alpha(x_k) = 0$ μ -pp donc pour tout ξ dans la boule unité de Y^* ,

$$\xi \left(T(x_k) \right) = \int_{B_{X^*}} h_\xi(\alpha) f_{x_k}(\alpha) d\mu(\alpha) = 0.$$

Ainsi, $T(x_k) = 0$.

3. On utilise d'abord Hölder :

$$\sum_{k=1}^n \|S \circ T(x_k)\| = \sum_{k=1}^n a_k \|S(y_k)\| \leq \sigma^{1/p} \cdot \left(\sum_{k=1}^n \|S(y_k)\|^q \right)^{1/q}$$

car

$$\left(\sum_{k=1}^n a_k^p \right)^{1/p} = \left(\int_{B_{X^*}} \sum_{k=1}^n |\alpha(x_k)| d\mu(\alpha) \right)^{1/p} \leq \left(\int_{B_{X^*}} \sigma d\mu \right)^{1/p} \leq \sigma^{1/p}.$$

Puis on écrit simplement ce que signifie S est q -sommant :

$$\left(\sum_{k=1}^n \|S(y_k)\|^q \right)^{1/q} \leq \pi_q(S) \sup_{\xi \in B_{Y^*}} \left(\sum_{k=1}^n |\xi(y_k)|^q \right)^{1/q}.$$

4. Si $a_k \neq 0$, on a pour tout $\xi \in B_{Y^*} : \xi(y_k) = \frac{1}{a_k} \xi(T(x_k)) = \frac{1}{a_k} \int_{B_{X^*}} h_\xi(\alpha) \alpha(x_k) d\mu(\alpha)$.

On utilise alors Hölder :

$$|\xi(y_k)| \leq \frac{1}{a_k} \cdot \left(\int_{B_{X^*}} |\alpha(x_k)| d\mu(\alpha) \right)^{1/p} \cdot \left(\int_{B_{X^*}} |h_\xi(\alpha)|^q |\alpha(x_k)| d\mu(\alpha) \right)^{1/q}$$

donc $|\xi(y_k)| \leq \left(\int_{B_{X^*}} |h_\xi(\alpha)|^q |\alpha(x_k)| d\mu(\alpha) \right)^{1/q}$.

Les k tels que $a_k = 0$ ne posent aucun problème puisque $y_k = 0$.

5. En sommant sur k , on obtient pour tout $\xi \in B_{Y^*}$:

$$\left(\sum_{k=1}^n |\xi(y_k)|^q \right)^{1/q} \leq \left(\int_{B_{X^*}} \sum_{k=1}^n |h_\xi(\alpha)|^q |\alpha(x_k)| d\mu(\alpha) \right)^{1/q} \leq \left(\int_{B_{X^*}} |h_\xi(\alpha)|^q \sigma d\mu(\alpha) \right)^{1/q}$$

donc $\left(\sum_{k=1}^n |\xi(y_k)|^q \right)^{1/q} \leq \sigma^{1/q} \cdot \pi_p(T)$ car $\|h_\xi\|_q \leq \pi_p(T)$.

6. En collant 3. et 5., on obtient la conclusion : pour tous $x_1, \dots, x_n \in X$, on a

$$\sum_{k=1}^n \|S \circ T(x_k)\| \leq \pi_q(S) \cdot \pi_p(T) \cdot \sup_{\alpha \in B_{X^*}} \sum_{k=1}^n |\alpha(x_k)|$$

ce qui signifie que $S \circ T$ est 1-sommant avec $\pi_1(S \circ T) \leq \pi_q(S) \cdot \pi_p(T)$.

Exercice 4

1. Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ faiblement convergente dans X_0 . La suite $(S(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ faiblement convergente dans X (car S est continue de X_0 dans X , munis des topologies faibles). Puis la suite $(T \circ S(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ convergente en norme dans Y par hypothèse. Enfin, $(R \circ T \circ S(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ convergente en norme dans Y_0 par continuité.

2. Cela correspond alors aux opérateurs compacts.

Tout opérateur compact est complètement continu : c'est toujours vrai (cf cours).

Réciproquement si X est réflexif. Alors de toute suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dans la boule unité de X , on peut extraire une sous-suite $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ faiblement convergente dans X vers $x \in X$. Si $T \in DP(X, Y)$, alors en appliquant la définition à $x_{n_k} - x$, $(T(x_{n_k}))_{k \in \mathbb{N}}$ convergente en norme dans Y vers $T(x)$.

3.a. Soit ξ une forme linéaire continue sur H^1 , par Hahn-Banach puis le théorème de représentation du dual de L^1 , il existe $h \in L^\infty$ tel que $\xi(f) = \int_T h f$ donc

$$\xi(z^n) = \int_T h(t) e^{int} dt = \hat{h}(-n)$$

qui converge vers 0 par Riemann-Lebesgue.

3.b. On applique la définition et 3.a pour obtenir que $C_\varphi(z^n)$ converge vers 0 en norme dans H^1 . Ainsi

$$\int_T |\varphi^*|^n d\lambda \longrightarrow 0.$$

Or, en notant $E = \{z \in T \mid |\varphi^*| = 1\}$, on a par le théorème de convergence dominée

$$\int_T |\varphi^*|^n d\lambda \longrightarrow \int_E d\lambda = \lambda(E).$$

Exercice 5

1. Si $x \in FHC(T)$, alors pour tout $n \geq 0$, $T^n x$ appartient à $FHC(T)$ car on ne change pas la densité inférieure d'un ensemble en supprimant un nombre fini de points. Comme $\{T^n x; n \geq 0\}$ est dense dans X en particulier, $FHC(T)$ est dense dans X .

2. Si p est un polynôme non nul, $p(\zeta) = \prod_{i=1}^d (\zeta - \lambda_i)$. Comme T est hypercyclique, $\sigma_p(T^*)$ est vide donc chaque opérateur $T - \lambda_i$ est à image dense, et donc $p(T)$ est à image dense. Soit $x \in FHC(T)$ et U un ouvert non vide de X . Alors $\{n \geq 0; T^n p(T)x \in U\} = \{n \geq 0; T^n x \in p(T)^{-1}(U)\}$. Comme U est non vide et $p(T)$ est à image dense, $p(T)^{-1}(U)$ est un ouvert non vide de X . Donc $d\{n \geq 0; T^n x \in p(T)^{-1}(U)\} > 0$. Donc $p(T)x \in FHC(T)$. Si on prend $M = \{p(T)x; p \in \mathbb{C}[\zeta] \setminus \{0\}\}$, c'est un sous-espace vectoriel de X qui est dense dans X et $M \setminus \{0\} \subseteq FHC(T)$.

3. Sous les hypothèses de la question, le théorème ergodique de Birkhoff est vérifié : pour toute $f \in L^1(X, \mathcal{B}, m)$,

$$\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} f(T^n x) \longrightarrow \int_X f dm$$

pour m -presque tout x . Soit U un ouvert non vide de X . On applique cela à χ_U , la fonction indicatrice de U :

$$\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \chi_U(T^n x) = \frac{1}{N} \#\{n \in [0, N-1] ; T^n x \in U\} \longrightarrow m(U)$$

pour m -presque tout x , et donc $d(N_{U,x}) = \underline{d}(N_{U,x}) = m(U)$ pour tout $x \in A_U$, où A_U est un sous-ensemble de X avec $m(A_U) = 1$. Soit $(U_k)_{k \geq 1}$ une base de la topologie de X , et $A = \cap_{k \geq 1} A_k : m(A) = 1$. On a pour tout $x \in A$ $\underline{d}(N_{U_k,x}) = m(U_k) > 0$ car m est non dégénérée. Donc $x \in FHC(T)$ car pour tout ouvert U non vide il existe k tel que $U_k \subseteq U$ et donc $\underline{d}(N_{U,x}) \geq \underline{d}(N_{U_k,x})$. Donc T est fréquemment hypercyclique et $m(FHC(T)) = 1$.

4. Si M_ψ^* est fréquemment hypercyclique, M_ψ^* est hypercyclique, et donc $\psi(\mathbb{D}) \cap \mathbb{T}$ est non vide. Réciproquement si $\psi(\mathbb{D}) \cap \mathbb{T}$ est non vide, on sait (cf. cours) qu'il existe $E : \mathbb{T} \rightarrow H^2(\mathbb{D})$ continue avec $\text{vect}[E(\lambda) ; \lambda \in \mathbb{T}] = H^2(\mathbb{D})$ et pour tout $\lambda \in \mathbb{T}$, $TE(\lambda) = \lambda E(\lambda)$. Donc M_ψ^* est ergodique par rapport à une certaine mesure gaussienne non dégénérée invariante m , et d'après la question 3 M_ψ^* est fréquemment hypercyclique.

5.a) T vérifie le Critère d'Hypercyclicité avec $(n_k) = (n)$ et D l'ensemble des vecteurs à support fini. Pour $x \in D$ il existe un n_0 tel que pour tout $n \geq n_0$, $T^n x = 0$. On pose

$$S e_k = \frac{1}{w_{k+1}} e_{k+1}$$

et $S_n = S^n : S_n T^n = I$ et

$$S_n e_k = \frac{1}{w_{k+1} \dots w_{k+n}} e_{k+n} = \sqrt{\frac{k+1}{n+k+1}} e_{k+n}.$$

Donc $\|S_n e_k\|$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$ et ceci prouve que pour tout $x \in D$, $\|S_n x\|$ tend vers 0.

b) Supposons que $x = (x_n)_{n \geq 0}$ est fréquemment hypercyclique pour T . Soit

$$U = \{x ; | \langle x, e_0 \rangle - 1 | < \frac{1}{2}\}$$

et $D = \{n \geq 0 ; T^n x \in U\}$. On a

$$T^n \left(\sum_{k \geq 0} x_k e_k \right) = \sum_{k \geq 0} x_{k+n} \sqrt{\frac{k+n+1}{k+1}} e_k$$

et donc $\langle T^n x, e_0 \rangle = \sqrt{n+1} x_n$. Donc $D = \{n \geq 0 ; |\sqrt{n+1} x_n - 1| < 1/2\}$ est de densité inférieure strictement positive. On a donc pour tout $n \in D$ $|\sqrt{n+1} x_n| \geq 1/2$, c'est à dire

$$|x_n|^2 \geq \frac{1}{2(n+1)}.$$

Donc la série $\sum_{n \in D} 1/(n+1)$ converge. Or D est de densité inférieure strictement positive, donc il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $N \geq N_0$,

$$\frac{1}{N} \#(D \cap [0, N-1]) \geq \delta.$$

Si N_1 est fixé, on a pour N assez grand (dépendant de N_1)

$$\frac{1}{N} \#(D \cap [N_1, N-1]) \geq \frac{\delta}{2}.$$

Donc dans $D \cap [N_1, N-1]$, il y a au moins $(\delta/2)N$ entiers plus petits que $N-1$. Ceci donne

$$\sum_{n \in D \cap [N_1, N-1]} \frac{1}{n+1} \geq \frac{\delta}{2} N \frac{1}{N} = \frac{\delta}{2}.$$

Le critère de Cauchy n'est donc pas vérifié pour la série $\sum_{n \in D} 1/(n+1)$, contradiction.