Examen - session 1

ARITHMÉTIQUE

*Les calculatrices et les documents sont interdits.
La rédaction sera prise en compte dans la notation.*

Cours et application. (6 points=1,5+1,5+3)

- 1) Soient p un nombre premier et $k \in \{1, \dots, p-1\}$. Montrer que p divise $C_p^k = \binom{p}{k}$.
- 2) Soit $n \geq 1$ un entier. Rappeler la définition de la fonction indicatrice d'Euler φ et donner (sans preuve) la valeur de $\varphi(n)$.
- 3) Trouver tous les couples $(x, y) \in \mathbb{Z}$ tels que $441x + 400y = 3$.

Exercice 1. (6 points=0,5+1,5+1+0,5+1,5+1)

Soit $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq 1$. On note $\mathcal{S}_n$ l'ensemble des bijections de $\{1, \dots, n\}$ sur lui-même. On dit que $\sigma \in \mathcal{S}_n$ est un dérangement si pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, on a $\sigma(i) \neq i$. On note $\mathcal{D}_n$ l'ensemble des dérangements. On cherche à déterminer le cardinal de $\mathcal{D}_n$.

- 1) Que vaut le cardinal de $\mathcal{S}_n$?

Pour $i \in \{1, \dots, n\}$, on note $A_i = \{\sigma \in \mathcal{S}_n \mid \sigma(i) = i\}$.

- 2) Montrer que A_i est en bijection avec $\mathcal{S}_{n-1}$. En déduire le cardinal de A_i ?
- 3) Pour tout k -uplet d'indices $1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n$, déterminer le cardinal de $A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}$ en utilisant la même idée que dans la question précédente.
- 4) Comparer $\mathcal{D}_n$ et $\bigcup_{1 \leq i \leq n} A_i$.
- 5) En déduire que $\text{card}(\mathcal{D}_n) = n! - \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \binom{n}{k} [(n-k)!]$.
- 6) Simplifier cette expression afin de déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\text{card}(\mathcal{D}_n)}{\text{card}(\mathcal{S}_n)}$.

Exercice 2. (2,5 points)

Soit $a > 0$. Étudier la convergence de la série de terme général $u_n = e^{an^2} \left(1 - \frac{a}{n}\right)^{n^3}$, où $n \geq 1$.

Exercice 3. (7 points=(1+1,5+1+1+0,5)+1+1)

On suppose qu'il y a un nombre fini de nombres premiers congrus à 1 modulo 4: $q_1 < \dots < q_n$. On pose alors $A = q_1 \dots q_n$ et $B = A^2 + 1$.

- 1) On suppose qu'il existe un nombre premier $p > 2$ qui divise B .
 - a) Justifier que $p \equiv 3 \pmod{4}$. Indication: montrer que p n'est pas congru à 1 modulo 4.On peut donc écrire $p = 3 + 4m$ où $m \in \mathbb{N}$.
- b) Justifier que:

- i) p divise $A^4 - 1$.
- ii) p divise $A^{4m+2} - 1$.

- c) Montrer que le reste de la division euclidienne de $A^{4m+2} - 1$ par $A^4 - 1$ est $A^2 - 1$.
Indication: remarquer que $A^{4m+2} - 1 = A^{4m+2} - A^2 + A^2 - 1$.
- d) En déduire que p divise $A^2 - 1$ puis que p divise 2.
- e) En déduire quel est le seul diviseur premier de B .

- 2) Montrer que B est congru à 2 modulo 4.
- 3) Conclure.