Examen session 2

Éléments de correction

Cours. Voir le cours.

Exercice 1. On fait comme cela a été vu en cours et en TD. Ici, en appliquant l'algorithme d'Euclide, on trouve une relation de Bézout: $25 \times 49 + (-8) \times 153 = 1$. On en déduit que $(125, -40)$ est une solution particulière. Puis, on montre que l'ensemble des solutions est

$$\{(125 + 153k, -40 - 49k) \mid k \in \mathbb{Z}\} = \{(-28 + 153l, 9 - 49l) \mid l \in \mathbb{Z}\}$$

Exercice 2. Cf cours et TD.

Exercice 3. 1) Cet entier s existe car c'est $m = \max\{l \in \mathbb{N} \mid l \geq 1 \text{ et } n \geq 2^l\}$. En effet, la partie de $\mathbb{N}$ considérée est non vide ($l = 1$ y appartient) et majorée (par exemple par n lui-même). On a alors $n \geq 2^m$ et $m + 1$ ne pouvant être dans l'ensemble vérifie $2^{m+1} > n$.

2) On minore par $2^j \cdot \frac{1}{2^{j+1}} = \frac{1}{2}$ (comme en cours): il y a 2^j termes supérieurs à $\frac{1}{2^{j+1}}$.

3) On a

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \geq \sum_{j=0}^{s-1} \sum_{k=2^j}^{2^{j+1}-1} \frac{1}{k} \geq \sum_{j=0}^{s-1} \frac{1}{2} = \frac{s}{2}$$

donc, comme $2^{s+1} > n$ i.e. $s > \frac{\ln(n+1)}{\ln(2)} - 1$, on a

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \geq \frac{\ln(n+1)}{2 \ln(2)} - \frac{1}{2} \geq c \ln(n)$$

par exemple avec $c = \frac{1}{4 \ln(2)}$.

Exercice 4. Voir examen 07-08 session2.