Licence de Mathématiques.
Université d'Artois.
21/12/07.
Durée 3h

Examen
ARITHMÉTIQUE

Les calculatrices et les documents sont interdits.

La rédaction sera prise en compte dans la notation.

Cours. (4 points=1+1+2)

1) Soit E un ensemble. Quelle est la définition de "E est fini"?
2) Soit E un ensemble. Quelle est la définition de "E est dénombrable"?
3) Parmi les affirmations suivantes, lesquelles sont vraies ? *(justifier soit en invoquant le cours, soit en donnant un contre-exemple).*

i) Une réunion finie d'ensembles finis est fini.
ii) Une réunion finie d'ensembles dénombrables est dénombrable.
iii) Une réunion dénombrable d'ensembles finis est dénombrable.
iv) Une réunion dénombrable d'ensembles dénombrables est dénombrable.

Exercice 1. (4 points)

Déterminer tous les entiers $k \in \mathbb{Z}$ tels que $$18k \equiv 2\ [185].$$

Exercice 2. (3 points)

Donner un expression très simple de $\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\right)^{2007000000070020}$

Exercice 3. (9,5 points=[(3+0,5)+2+1]+[0,5+1+0,5+1])

Dans tout le sujet, la notation $\bar{x}$ désigne la classe de x dans l'ensemble quotient considéré.

I] Soit p un nombre premier impair. On se place dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. On notera $d = \dfrac{p-1}{2}\cdot$

On considère S^- l'ensemble des racines du polynôme $X^d - \bar{1}$, et de même, S^+ est l'ensemble des racines du polynôme $X^d + \bar{1}$. On rappelle qu'en raison du degré, les cardinaux de S^+ et S^- sont inférieurs à d.

Enfin $K = \{a^2 |\ a \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}\}$ est l'ensemble des carrés dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.

1)a) Montrer que l'application $\chi : \{0, \ldots, d\} \to \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, qui à un entier x associe $\bar{x}^2$, est injective. Est-elle surjective ?

b) En déduire que $\mathrm{card}(K) \geq \dfrac{p+1}{2}\cdot$

2) Montrer que si $K \setminus \{0\} \subset S^-$. En déduire que $K = \{0\} \cup S^-$.

3) Montrer que $\overline{-1}$ est un carré dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ si et seulement si $p \equiv 1[4]$.

II] On introduit l'ensemble E des nombres premiers congrus à 1 modulo 4. On veut montrer que l'ensemble E est infini.

On suppose qu'il est fini et on note $n = \max E$, puis on définit $N = (n!)^2 + 1$.

1) Justifier l'existence de n.

2) Montrer qu'il existe un nombre premier impair p divisant N.

3) Montrer que $p \in E$.

4) Conclure.