

Examen session 1 ARITHMÉTIQUE

*Les calculatrices et les documents sont interdits.
La rédaction sera prise en compte dans la notation.*

Cours. (5,5 points=(1+1)+(1+2,5))

- 1) Soit $b \geq 2$, un entier.
 - a) Rappeler la forme de la décomposition (non impropre) en base b d'un réel x .
 - b) A quelle condition (nécessaire et suffisante), cette décomposition est périodique.
- 2)
 - a) Soient a et b deux entiers non nuls. Quelle relation relie a , b , leur pgcd et leur ppcm ?
 - b) Démontrer ce résultat.

Exercice 1. (3 points)

On utilise ici l'écriture décimale (usuelle). Quel est le chiffre des unités de 1234^{28} ?

Exercice 2. (4 points=1+(1+0,5)+1,5)

Soient E un ensemble fini de cardinal $n \geq 1$ et A une partie de E . On note p le cardinal de A .

- 1) Déterminer le cardinal de l'ensemble des parties $X \in \mathcal{P}(E)$ telles que $A \subset X$.
- 2) Soit $m \in \{p, \dots, n\}$.
 - a) Déterminer le cardinal de l'ensemble des parties $Z \in \mathcal{P}(E)$ telles que $A \subset Z$ et $\text{card}(Z) = m$.
 - b) Retrouver le résultat du 1.
- 3) Déterminer le cardinal de l'ensemble $\{(X, Y) \in \mathcal{P}(E) \times \mathcal{P}(E) \mid X \cap Y = A\}$.

Exercice 3. (10,5 points=(0,5+1+1)+(1,5+2)+(0,5+0,5+1+1+1,5))

Dans cet exercice, on note $\bar{x}$, la classe de x dans l'ensemble quotient considéré.

- 1) Soit $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq 1$.
 - a) Rappeler la définition de $\varphi(n)$, où φ est la fonction indicatrice d'Euler.
 - b) Exprimer (sans preuve) sa valeur en fonction de la décomposition en nombres premiers de n .
 - c) Énoncer (précisément) le théorème d'Euler (dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$).
- 2) Soient $n \geq 2$ et $a \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. On note $\Omega_n(a) = \{k \geq 1 \mid a^k = \bar{1}\}$.
 - a) Montrer que $\Omega_n(a) \neq \emptyset \iff a \in (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^*$ (on rappelle que c'est l'ensemble des éléments inversibles (pour le produit) de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$).
 - b) Soit $a \in (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^*$. On note alors $\omega_n(a) = \min \Omega_n(a)$. Justifier que $\omega_n(a)$ est bien défini et montrer que $\omega_n(a)$ divise $\varphi(n)$. *Indication: on pourra effectuer la division euclidienne de $\varphi(n)$ par $\omega_n(a)$ et montrer que le reste est nul.*
- 3) Dans cette question, $n = 16$.
 - a) Pourquoi $\bar{5} \in (\mathbb{Z}/16\mathbb{Z})^*$?
 - b) Quel est le reste de la division euclidienne de 5^4 par 16?
 - c) Que vaut $\omega_{16}(\bar{5})$?
 - d) En déduire l'inverse de $\bar{5}$ dans $\mathbb{Z}/16\mathbb{Z}$?
 - e) Trouver tous les entiers x tels que $5x \equiv 2 \pmod{16}$.