Université d'Artois
Faculté des Sciences Jean Perrin
M1 Mathématiques 2006–2007

Examen d'Analyse Fonctionnelle

lundi 8 janvier 2007

durée 4 heures

Exercice 1.

1) Soit H un espace de Hilbert réel muni du produit scalaire $(. \mid .)$, et soit T un endomorphisme continu de H. On note T^* l'adjoint de T. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :

a) $T^* \circ T = Id$;

b) $\forall\ x, y \in H$, $(T(x) \mid T(y)) = (x \mid y)$;

c) T est une isométrie ;

2) Soit S l'endomorphisme de ℓ^2 défini par $S(a) = (0, a_0, a_1, a_2, \cdots)$ où $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

a) Montrer que S est une isométrie.

b) Déterminer S^*.

3) Si T est une isométrie, a-t-on $T \circ T^* = Id$?

Exercice 2.

1) Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction continûment dérivable telle que f et $f' \in L^1(\mathbb{R})$. Montrer que $\big(\mathscr{F}(f')\big)(t) = 2\pi i t(\mathscr{F}f)(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

2) Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$; on pose $g(x) = xf(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, et l'on suppose que $g \in L^1(\mathbb{R})$. Montrer que $\mathscr{F}f$ est dérivable et que $(\mathscr{F}f)' = -2\pi i\mathscr{F}g$.

Exercice 3.

Soit E un espace de Banach et F un espace normé. Montrer la version suivante du théorème de Banach-Steinhaus : pour toute famille d'opérateurs $(T_i)_{i\in I} \in \mathscr{L}(E, F)$, on a l'alternative suivante :

a) soit il existe $M > 0$ tel que $\|T_i\| \leq M$ pour tout $i \in I$;

b) soit il existe une partie dense G de E (qui est une intersection dénombrable d'ouverts denses) dont tout élément x vérifie $\sup_{i\in I} \|T_i(x)\| = +\infty$.

T.S.V.P. $\longrightarrow$

Exercice 4.

On considère l'espace *complexe* $L^2 = L^2([0,1],\mathbb{C})$, et l'on définit l'opérateur $S\colon L^2 \to L^2$ par $S(f)(t) = t\,f(t)$.

1) a) Vérifier que l'on a bien $Sf \in L^2$ pour toute $f \in L^2$ et que S est borné.

b) Montrer que S n'a aucune valeur propre.

2) Soit $\lambda \in [0,1[$, et soit $\varepsilon > 0$ tel que $[\lambda, \lambda+\varepsilon] \subseteq [0,1]$. Soit $f_\varepsilon = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \mathbb{1}_{[\lambda,\lambda+\varepsilon]}$.

a) Montrer que $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} (S - \lambda I)(f_\varepsilon) = 0$.

b) En déduire que λ est dans le spectre $\sigma(S)$ de S.

3) Montrer que si $\lambda \in \mathbb{C} \setminus [0,1]$, alors $\lambda \notin \sigma(S)$.

4) Déterminer $\sigma(S)$.

Exercice 5.

Soit μ une mesure complexe non nulle sur $[0,1]$ telle que $|\mu|(\{0,1\}) = 0$. On pose, pour tout $n \in \mathbb{Z}$:

$$\hat{\mu}(n) = \int_0^1 \mathrm{e}^{-2\pi int}\, d\mu(t),$$

et l'on suppose que $\lim_{n\to+\infty} \hat{\mu}(n) = 0$.

1) On suppose que l'ensemble $\mathscr{P}$ des polynômes trigonométriques n'est pas dense dans $L^1(|\mu|)$.

a) Montrer qu'il existe $h_0 \in L^\infty(|\mu|)$ non nul tel que pour tout $P \in \mathscr{P}$, on ait $\int_0^1 P h_0\, d|\mu| = 0$.

b) En déduire que $\int_0^1 f h_0\, d|\mu| = 0$ pour toute $f \in \mathscr{C}([0,1])$.

c) Qu'en conclut-on ?

2) Montrer que pour toute $f \in L^1(|\mu|)$, on a : $\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 f(t)\,\mathrm{e}^{-2\pi int}\, d\mu(t) = 0$ (*on raisonnera d'abord avec des polynômes trigonométriques*).

3) En déduire que $\lim_{n\to+\infty} \widehat{|\mu|}(n) = 0$ (*utiliser la décomposition polaire d'une mesure*).

4) En déduire que $\lim_{n\to-\infty} \hat{\mu}(n) = 0$.

* * * * * * * * * * * * * *